

REMARQUES

- Ne pas oublier d'utiliser le JdeB!! (données, auto-évaluation)
- Succession des matières : voir notes de cours
- En « première lecture » : pas de « combinatoire », pas le binôme de Newton

Exercices sur la matière vue au cours

1. Résoudre les équations suivantes (x est l'inconnue réelle).

$$1) -\pi x + \frac{1}{4} = \frac{x}{\pi} \quad 2) 8x^3 + 1 = 0 \quad 3) x - \frac{1}{x} = 1$$

$$4) \left| -x + \frac{1}{2} \right| = |-x| \quad 5) ||x| - |x^2|| - 2 = 0 \quad 6) ||x| - |x^2|| + 2 = 0$$

2. Résoudre les inéquations suivantes (x est l'inconnue réelle).

$$1) \frac{1}{1-x} > \frac{1}{-x+2} \quad 2) |2x-1| > 2 \quad 3) \frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{|-x^2+3+2x|}$$

3. Calculer (x est un réel négatif) $\sqrt{(-3)^4}$, $\sqrt[3]{(-\pi)^3}$, $\sqrt{9x^2}$, $(-|(-x^4)|)^3$.

4. Ecrire les sommes suivantes à l'aide d'un symbole sommatoire.

$$s_1 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \quad s_2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9.$$

Calculer les sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{j=2}^5 (-2)^{2j-1}, \quad S_2 = \sum_{l=0}^4 \pi^2.$$

5. Dans le plan, pouvoir déterminer les composantes de vecteurs d'après une représentation graphique. Pouvoir représenter des vecteurs dont on donne les composantes.
6. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On demande
- l'équation de la droite passant par le point de coordonnées $(0, 1)$ et orthogonale à la droite d'équation $x + y + 1 = 0$,
 - des équations paramétriques de la droite d'équation $x + y + 1 = 0$,
 - l'équation cartésienne de la droite passant par les points de coordonnées $(-2, 1)$ et $(2, 3)$. Même question mais avec les points de coordonnées $(-2, 1)$ et $(-2, 0)$.
7. Soit le réel x appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ tel que $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$. Calculer la valeur de $\sin x$, $\cos x$, $\cotg x$.
8. En supposant que l'on ne considère que des réels x pour lesquels les expressions suivantes sont définies, montrer qu'en fait elles ne dépendent pas de x .

$$\operatorname{tg} x + \cotg x - \frac{1}{\sin x \cos x}, \quad \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$$

9. Démontrer que

$$4 \sin \left(\frac{7\pi}{24} \right) \sin \left(\frac{11\pi}{24} \right) = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

10. Résoudre les équations et l'inéquation suivantes dans l'intervalle $[0, 2\pi]$:

$$\sin(2x) = \cos x, \quad \cos(2x) = \cos x, \quad \sin(2x) \geq \cos x.$$

11. On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. On donne

$$\vec{a} = 2\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2, \quad \vec{b} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3.$$

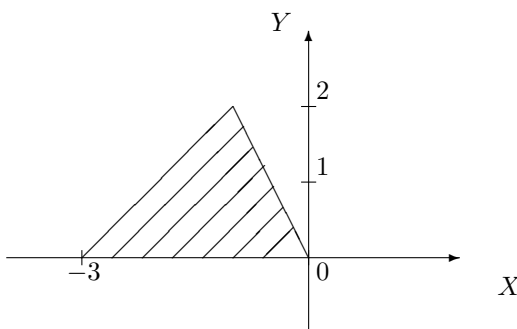
Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ suivants

$$\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{b} \wedge \vec{a}, \quad \vec{y} = \vec{a} \bullet \vec{b} \vec{a}, \quad \vec{z} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a}).$$

12. Dans une base orthonormée, déterminer les composantes de projections orthogonales de vecteurs sur des droites vectorielles (+représentations graphiques).
13. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point P_1 de coordonnées cartésiennes x_1, y_1 , telles que $0 < x_1 < y_1$. On fait tourner le vecteur $\vec{OP_1}$ de 60° dans le sens trigonométrique, en le maintenant lié à l'origine. En fonction des coordonnées de P_1 , déterminer les coordonnées cartésiennes de l'extrémité du vecteur obtenu après rotation. Représenter graphiquement la situation.
14. Représenter graphiquement les ensembles suivants dans un repère orthonormé

$$\begin{array}{ll} \{(2\sqrt{1-x^2}, x) : x \in [-1, 1]\} & \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, \frac{1}{x^2-y^2} \leq 1\} \\ \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, |x-y-1| \leq 1\} & \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 1-x^2 \text{ et } x^2+2y+y^2 \leq 3\} \\ \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, \frac{1}{xy} \geq 1\} & \{(t, \sqrt{1+t^2}) : t \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

15. Décrire analytiquement l'ensemble hachuré suivant, les points du bord étant compris dans l'ensemble.



16. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les courbes données par les équations cartésiennes suivantes. Donner le nom précis des coniques qui apparaissent, ainsi que la valeur de leur excentricité et les coordonnées des foyers.

$$a) x^2 - \frac{y^2}{4} = 4, \quad b) x = y^2 + 1, \quad c) x^2 + \frac{y^2}{4} = 4, \quad d) x^2 + x + y^2 = 0$$

$$e) x^2 = y^2, \quad f) y^2 - \frac{x^2}{4} = 4, \quad g) y = xy^2, \quad h) y^2 + \frac{x^2}{4} = 4$$

17. Résoudre les systèmes suivants

$$1) \begin{cases} y - x = 0 \\ 2y + x = 1 \end{cases}, \quad 2) \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 3 = 1 \end{cases}, \quad 3) \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 3 = 0 \end{cases}, \quad 4) \begin{cases} y + x + z = 1 \\ y - x + 2z = 0 \end{cases}$$

Exercices “de calcul et raisonnement élémentaires”

1. La vitesse d'Apollo X était de 39 867 km/h. Quelle était la vitesse de cette fusée en m/s ?
2. Deux citernes contiennent respectivement 45 m³ et 315 hl. Quelle est la quantité totale d'eau contenue dans ces deux citernes, en kl ?
3. Sur Terre, combien pèse un corps dont la masse est de 10kg ?
4. Sur Terre, une pression de 1 atmosphère correspond approximativement à
☐ une masse de 1kg répartie sur 1m² ☐ une masse de 1kg répartie sur 1dm² ☐ une masse de 1kg répartie sur 1cm² ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
5. En une semaine, une plante absorbe 238 ml d'eau. Après combien de jours aura-t-elle absorbé 1l ?
6. Combien de m³ d'eau de mer doit-on prendre pour en retirer 615 kg de sel si 1 l de cette eau pèse 1,025 kg et contient 3 % de son poids en sel ?
7. L'équation des gaz parfaits est donnée par $pV = nRT$ où

$$\left\{ \begin{array}{l} p \text{ est la pression du gaz en Pa} \\ V \text{ est le volume du gaz en m}^3 \\ T \text{ est la température du gaz en K} \\ n \text{ et } R \text{ sont des constantes strictement positives.} \end{array} \right.$$

Si, à pression constante, la température T augmente de 200 K alors le volume occupé par le gaz

- ☐ augmente de 200 m³ ☐ augmente de $\frac{200}{T}$ m³ ☐ est multiplié par 200
 - ☐ est divisé par $\frac{T}{200}$ ☐ aucune des réponses proposées n'est correcte
8. Le corps humain contient en moyenne 5,5 l de sang et environ 5 millions de globules rouges par mm³ de sang. On sait que le diamètre d'un globule rouge mesure 7μm (micromètre) et que le rayon de la Terre mesure 6 400 km. Si on place côte à côte tous les globules rouges contenus dans un humain, on a un ruban dont la longueur en km est notée L_{GR} . De même, on note L_T la longueur en km d'un tour de l'équateur. Dans ces conditions, on a
☐ $L_{GR} < L_T$ ☐ $L_T < L_{GR} < 2 L_T$ ☐ $2 L_T < L_{GR} < 3 L_T$ ☐ $3 L_T < L_{GR} < 4 L_T$
☐ aucune des réponses proposées n'est correcte
 9. Si la lumière du Soleil met 8,3 minutes pour nous parvenir, quelle est la distance approximative (en km) entre la Terre et le Soleil ?
 10. Si la distance entre la Terre et la Lune est approximativement de 384 000 km, quel temps met un rayon lumineux pour parcourir celle-ci ?

Exercices pour TD ou “devoirs”

1. Résoudre (x est l'inconnue réelle)

$$3x^3 + 2x^2 = x, \quad \frac{1}{x^3} \geq \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{1-x^2} \geq \frac{1}{|x-1|}$$

2. Représenter graphiquement les courbes dont l'équation cartésienne est donnée ci-dessous. Dans le cas des coniques, préciser le nom, déterminer l'excentricité et les coordonnées des foyers.

$$x^2 - 4y^2 = 1, \quad (\text{seulement représenter}) |xy| = 1, \quad x^2 + y = 1, \quad x + y = 1, \quad -y + y^2 + x^2 = 2.$$

3. – Le cube d'un réel non nul et de son inverse (pour la multiplication) sont parfois égaux.
Vrai ☐ Faux ☐
– Si r est un réel négatif, alors $\sqrt[4]{(-r)^8}$ vaut
 r^2 ☐ $-r^2$ ☐ $\pm r^2$ ☐ aucune réponse correcte ☐
– L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x|^3 < |x|^2 x$ est l'ensemble
 $[-1, 1[$ ☐ $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ ☐ $] -1, 1[\setminus \{0\}$ ☐ $] -\infty, 1[$ ☐ aucune réponse correcte ☐
– Etant donné deux vecteurs non parallèles d'un plan, tout autre vecteur du plan peut toujours se décomposer comme somme de multiples d'un des vecteurs et de son opposé.
Vrai ☐ Faux ☐

- Exprimer mathématiquement que la valeur absolue d'un réel et de son opposé sont les mêmes réels positifs.
 - Sous quelle condition nécessaire et suffisante la racine carrée du carré d'un réel non nul est-elle égale à ce réel ?
4. Sur Terre, si une masse de 100g est posée sur 1mm², cette situation correspond à une pression de
☐ 0,1 atm ☐ 1 atm ☐ 10 atm ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
 5. Un tonneau d'une contenance de 150 dm³ est rempli à l'aide de bouteilles de 75 cl. Combien de bouteilles doit-on verser pour le remplir complètement ?
 6. Un mètre cube de bois de chêne pèse 750 kg. En dm³, quel volume occupe 2,4 tonnes de bois ?
 7. En se transformant en glace, l'eau voit son volume augmenter de 1/15. Quelle quantité d'eau en litres faut-il pour obtenir 1,28 m³ de glace ?
 8. Un plancher mesure 69 m². Combien de planches de 46 dm² doit-on employer pour le confectionner ?
 9. Le lait contient environ les 3/20 de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2 000 l de lait si la densité du lait est 1,032 ?
 10. En optique, dans le cas d'un miroir sphérique, on a la formule suivante $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$
 où p (respectivement q) représentent la distance du miroir à l'objet (respectivement à l'image) et où f est la distance focale du miroir. Ainsi, la distance de l'objet au miroir vaut
☐ $f - q$ ☐ $\frac{fq}{q - f}$ ☐ $\frac{fq}{f - q}$ ☐ $\frac{q - f}{fq}$
☐ aucune des réponses proposées n'est correcte
 11. a) Sur la Terre, la distance entre le pôle nord et l'équateur est approximativement égale à
☐ 10³ m ☐ 10⁵ m ☐ 10⁶ m ☐ 10⁷ m ☐ 10¹² m
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte
 b) Convertir votre réponse en km.
 12. a) Le rayon moyen de la Terre est égal à
☐ 64 × 10³ m ☐ 64 × 10⁵ m ☐ 64 × 10⁶ m ☐ 64 × 10⁸ m ☐ 64 × 10¹² m
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte
 b) Convertir votre réponse en km.
 13. En moyenne, la distance entre la Terre et la Lune est égale à
☐ 38 × 10⁹ m ☐ 38 × 10⁷ m ☐ 38 × 10⁶ m ☐ 38 × 10⁵ m ☐ 38 × 10³ m
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte
 14. Le rapport entre la distance de la Terre à la Lune et le rayon terrestre est approximativement
☐ 6 10² km ☐ 6 10³ km ☐ 6 10⁵ km ☐ 6 ☐ 60 ☐ 600 ☐ 6000 m ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte
 15. a) Une année-lumière est approximativement égale à
☐ 9,46 × 10¹⁵ m ☐ 9,46 × 10¹² m ☐ 9,46 × 10⁹ m ☐ 9,46 × 10⁶ m ☐ 9,46 × 10³ m
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte
 b) Convertir votre réponse en km
 16. a) La longueur moyenne du rayon de l'orbite de la Terre autour du Soleil est égale à
☐ 1,5 × 10¹⁴ m ☐ 15 × 10¹² m ☐ 150 × 10⁹ m ☐ 150 × 10⁶ m ☐ 150 × 10³ m
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte
 b) Convertir votre réponse en km
 17. a) On définit généralement l'erreur absolue entre deux mesures comme étant la valeur absolue de la différence entre la valeur approchée et la valeur réelle et l'erreur relative comme le quotient entre l'erreur absolue et la valeur absolue de la valeur réelle.
 b) Et que se passe-t-il dans les questions ci-dessous si on prend comme définition de l'erreur absolue la différence entre la valeur approchée et la valeur réelle, dans cet ordre ?
 – L'erreur absolue sur un produit de deux mesures est
☐ la différence entre les erreurs absolues de chacune des mesures
☐ la somme entre les erreurs absolues de chacune des mesures
☐ le produit entre les erreurs absolues de chacune des mesures
☐ le quotient entre les erreurs absolues de chacune des mesures
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte

- L'erreur relative sur un produit de deux mesures est
 - ☐ la différence entre les erreurs relatives de chacune des mesures
 - ☐ la somme entre les erreurs relatives de chacune des mesures
 - ☐ le produit entre les erreurs relatives de chacune des mesures
 - ☐ le quotient entre les erreurs relatives de chacune des mesures
 - ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte
- Un morceau de sucre pèse (environ) 10 gr. On le pèse sur une balance moins précise et on trouve 9 gr. L'erreur relative commise est égale à
 - ☐ 1 ☐ 1g ☐ 1% ☐ 0,1 ☐ 0,1 g ☐ 0,1 % ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte
- Un morceau de sucre pèse (environ) 10 gr. On le pèse sur une balance moins précise et on trouve 9 gr. L'erreur absolue commise est égale à
 - ☐ 1 ☐ 1g ☐ 1% ☐ 0,1 ☐ 0,1 g ☐ 0,1 % ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte