Mathématiques générales

Liste « type » 2

Répétition Math 4 , semaine 4

REMARQUES

- ne pas oublier d'utiliser le JdeB ! ! (données, auto-évaluation)
- succession des matières : voir nouvelles notes de cours

Matière : suite et fin du chapitre 1 (+ début du chapitre 2)

NB pour les nombres complexes : on y reviendra plus tard quand on aura vu la fonction exponentielle

Exercices sur la matière vue au cours

1. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le module et le conjugué de chacun des complexes suivants.
$$i(i+1), \quad (1+i)^3, \quad \frac{i+1}{i-1}$$
2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ et en représenter les solutions
$$z^2+1=0, \quad z^2-1=0, \quad z^2+i=0, \quad z^4-1=0, \quad z^2+z+1=0.$$
3. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous.
$$f_1(x)=\sqrt{\sin\frac{x}{2}}, \quad f_2(x)=\sqrt{\tan x-\sqrt{3}}.$$
4. Déterminer l'image des fonctions données explicitement ci-dessous
$$f_1(x)=1+|x-1|,\ x\in\mathbb{R}; \quad f_2(x)=x^2+3x+2,\ x\in\mathbb{R}; \quad f_3(x)=1+\sin x,\ x\in\mathbb{R}.$$
5. Pour chacune des fonctions données ci-dessous, déterminer le domaine de définition, déterminer si elle est périodique (et en donner alors la période), paire, impaire et en donner une représentation graphique.
$$f_1(x)=\cos(3x), \quad f_2(x)=\sin(3+x), \quad f_3(x)=\sin|x|, \quad f_4(x)=|\sin|x||.$$

Exercices « de calcul et raisonnement élémentaires »

1. Un menuisier doit construire une porte ayant la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-disque. La largeur de la porte est de 1,8 m et la hauteur totale de 3,9 m . Quelle est, en m^2, l'aire de cette porte ? (Rép. : 6,67 m^2)
2. Un mélange contient 45 litres d'eau salée et 30 litres d'eau pure. On désire en faire un mélange qui, sur deux litres, contienne 1/2 litre d'eau salée. Combien de litres d'eau pure doit-on ajouter ? (Rép. : 105 litres)
3. Une personne de masse 80 kg monte debout sur une chaise de 50 centimètres de haut. Quel est le travail effectué par le poids de cette personne ? (Rép. : -400 Joules)

Exercices pour TD ou « devoirs »

1. – Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont des vecteurs, l'expression $(\vec{a}\bullet\vec{b})\bullet\vec{c}$ est
   un vecteur☐ un réel ☐ ni l'un ni l'autre☐
   – Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont des vecteurs, l'expression $(\vec{a}\bullet\vec{b})\ (\vec{b}\bullet\vec{c})$ est
   un vecteur☐ un réel ☐ ni l'un ni l'autre☐
   – Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est toujours un nombre positif ou nul
   Vrai☐ Faux☐
2. Montrer que le nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ vérifie les propriétés suivantes
   – son inverse (pour la multiplication) est obtenu en lui soustrayant 1

– son carré est obtenu en lui ajoutant 1
– il vérifie l'équation $x^2 - x - 1 = 0$

3. Quelle est la définition géométrique du cosinus du nombre réel 6 ?
4. Résoudre les inéquations suivantes dans l'intervalle $[0, 2\pi]$
$$\cos^2 x \geq \cos(2x), \quad \cos^2 x \geq \frac{3}{2}\cos(2x).$$
5. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$
$$z^3 + 1 = 0, \quad z^2 + z = i(i + 1).$$
6. Un triangle de 12,4 m de haut a une superficie de $1,054 \times 10^{-2}$ ha. Que vaut, en mètres, la longueur de sa base ? (Rép. : 17 m)
7. Un rectangle dont la longueur mesure L mètres et la largeur l mètres « tourne autour de sa longueur » et engendre un cylindre de volume V_1. S'il « tourne autour de sa largeur », il engendre un cylindre de volume V_2. Que vaut le rapport V_1/V_2 ? (Rép. : l/L)
8. Quelle est la différence en cm^3 entre $\frac{1}{2}$ m^3 et le volume d'un cube de $\frac{1}{2}$ m d'arête ? (Rép. : 375 000 cm^3)
9. Un mélange contient 45 l d'eau salée et 30 l d'eau pure. On désire en faire un mélange qui, sur 2 litres, contienne 1/2 l d'eau salée. Combien de litres d'eau pure doit-on ajouter ? (Rép. : 105 l)
10. Un cycliste part de Bruxelles à 4 h du matin et roule en moyenne à 12 km/h. A quelle heure arrive-t-il à Liège si la distance entre ces deux villes est de 100 km ? (Rép. : 12 h 20)
11. (Exercice proposé au cours puis corrigé au cours)
Le *nombre d'or* est le réel défini comme suit. Il s'agit du rapport entre deux longueurs (la plus grande au numérateur) telles que le rapport de la somme de celles-ci sur la plus grande soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite. Que vaut ce nombre d'or ?
12. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.

    Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?
13. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point P_1 de coordonnées cartésiennes x_1, y_1, telles que $y_1 > |x_1| = -x_1$. On fait tourner le vecteur $\overrightarrow{OP}$ de 90° dans le sens trigonométrique, en le maintenant lié à l'origine. En fonction des coordonnées de P_1, déterminer les coordonnées cartésiennes de l'extrémité du vecteur obtenu après rotation. Représenter graphiquement la situation.
14. Dans un repère orthonormé, on donne la conique d'équation cartésienne $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
    – Représenter cette conique et en déterminer l'excentricité.
    – Quel que soit le réel θ, montrer que le point de coordonnées cartésiennes $(\cos\theta, 3\sin\theta)$ est un point de cette conique. Le représenter sur la conique, en expliquant la relation entre la position du point et la valeur de θ.
    – Quelles sont les coordonnées polaires du point de la conique dont les coordonnées sont données par l'expression ci-dessus avec la valeur $\theta = \frac{\pi}{6}$? Le représenter.
15. A submarine dives at an angle of 30° with the horizontal and follows a straigtht-line path for a total distance of 50 m. How far is the submarine below the surface of the water ?