Liste « type » 5

Répétitions (Math 7), Math 8, Math 9 ; semaines (7), 8, 9

Matière :

Un « essentiel » sur
- les limites (suite, en compléments à la liste 4),
- les dérivées,
- les primitives.

Exercices sur la matière vue au cours

1. On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

$$\sqrt{3x^4+1} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \qquad \frac{1}{x^2+2x+1} \qquad \cos(x^3) \qquad \mathrm{arctg}(\sin x) \qquad \sqrt{\cos 2x}$$

$$\sin(\sin x) \qquad e^{\sin x} \qquad e^{e^x} \qquad \ln(x^2) \qquad \ln(x^2-x-2) \qquad (\ln(3))^x$$

$$(*)\ln\Big((1-x)|x-1|\Big) \qquad (*)f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x} \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x\le 0\end{cases}$$

2. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \cos x$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Représenter cette fonction et cette tangente.
3. Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(2x)}{x+1} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{\mathrm{arctg}(3x^2+2)} \qquad \lim_{x\to-\infty}\exp\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln\sqrt[3]{x} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1/|x|)}{\sqrt{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\ln(2x+1)} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} \qquad \lim_{x\to-\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\ln(|x-1|)-\ln x^2\right) \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(1-x)}{|x-1|} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x^2+3x+4)}{x-4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln|-x^2+3x+4|}{x-4} \qquad \lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\cos x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\, x-\sin x}{x^3}$$

$$\lim_{u\to+\infty} u\, e^{\frac{1}{u-1}} \qquad \lim_{t\to 1^-}(t-1)\ln(1-t^2) \qquad \lim_{y\to+\infty}\log_y 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x^2)}{\exp(x)} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\exp(2x)}{\exp(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{\exp(x)}$$

4. Représentation graphique de fonctions (au moins une-pas nécessairement longue-dans le but de revoir l'étude du graphique d'une fonction). Par exemple $f(x)=\frac{x-x^2+1}{1-x}$, $f(x)=xe^{-x}$.
5. Où la fonction $x\mapsto x|x|$ est-elle définie, continue, dérivable ? En donner une représentation graphique ainsi que l'expression de sa dérivée.
6. Primitiver les fonctions données explicitement ci-dessous. Dans chaque cas, spécifier l'intervalle (et ajouter quelques questions du type "quelle est la primitive qui vaut ...en ...").

$\sqrt{2-3x}$	$x^2+x\sin(3x)$	$x\sin(x^2)$	$\sin^2(3x)$
$\ln(x+1)$	$x\ln(x+1)$	$\arcsin x$	$\sqrt{x}\ln x$
$(2x-1)e^{-x}$	$x\sin^2(4x)$	$x^2\sqrt{1+2x^3}$	$\cos(\pi x)\ e^{2x}$
3^x	x^3	π^x	x^π
$\frac{1}{x-x^2}$	$\frac{x+1}{1+x^2}$	$\frac{1+2x}{x+1}$	$\frac{1}{1+2x+x^2}$

Exercices pour TD ou « devoirs »

1. Domaine de définition, de dérivabilité et dérivée des fonctions données explicitement ci-dessous

$$\frac{1}{x^2+3}, \qquad \sqrt[3]{\pi x - 2}, \qquad (*)|\cos x|, \qquad \arcsin(1-x^2)$$

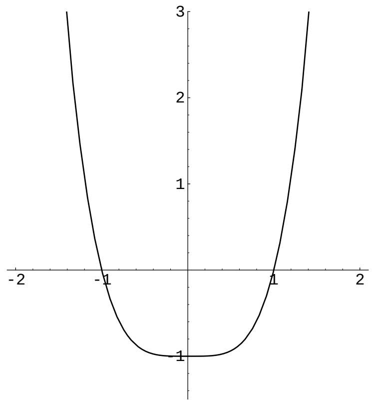
2. Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1/x)}{|x-1|} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-x)}{|x|}$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{\ln x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{\arcsin(x-1)}{(\operatorname{arctg} x) - \frac{\pi}{4}}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(x^2)}{\exp(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(2x)}{\exp(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\exp(2x)}}{\exp(x)}$$

3. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \operatorname{tg} x$ au point d'abscisse 0. Représenter cette fonction et cette tangente.
4. Primitiver les fonctions données explicitement ci-dessous. Dans chaque cas, spécifier l'intervalle où la primitivation s'effectue

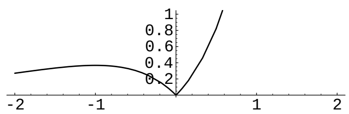
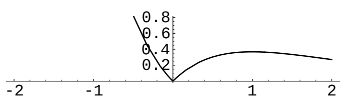
$$\cos(\pi x+1), \qquad \ln(x^2), \qquad \frac{\ln x^2}{x}, \qquad x\ \ln x^2, \qquad \cos x\,\sqrt{\sin x}, \qquad \frac{x^2+3}{x}$$

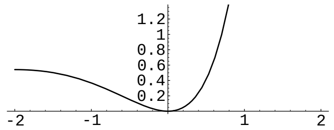
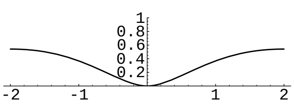
5. Soit une fonction f deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$; la représentation graphique de la dérivée seconde $D^2 f$ est la suivante ($D^2 f$ reste strictement positif pour tout $x < -1$ et pour tout $x > 1$)



On déduit de là que, nécessairement,
- f est croissant sur $]-\infty,-1[$ et sur $[1,+\infty]$ Vrai☐ Faux☐
- f est convexe sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$ Vrai☐ Faux☐
- f admet un minimum local strict en 1 Vrai☐ Faux☐
- le graphique de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse -1 Vrai☐ Faux☐

6. La représentation graphique de la fonction $f(x) = |x|e^{-x}$ est

 ☐  ☐

 ☐  ☐

7. On donne une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ dont la dérivée est à valeurs dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Expliquer pourquoi, dans ces conditions, toutes les droites sécantes au graphique de f ont un coefficient angulaire inférieur ou égal à $1/2$.

8. *Evolution d'une population en présence de « facteurs limitants ».*

Dans la nature, l'accroissement d'une population est modulée par la disponibilité des ressources alimentaires, par la prédation, par les facteurs du milieu. Tous ces éléments peuvent avoir un effet défavorable sur la croissance de la population et faire varier les taux de natalité et de mortalité. C'est ce que l'on appelle « facteurs limitants ».

Un modèle largement utilisé en écologie est le suivant[1]. Si $N(t)$ désigne la population au temps $t \geq 0$, si N_0 est la population initiale, l'analyse conduit à l'obtention d'une expression de type suivant [2] pour N

$$N(t) = \frac{K}{1 + c_0 e^{-3t/4}}, \ t \geq 0$$

où K est une constante relative au milieu[3] et où $c_0 = \frac{K}{N_0} - 1$.

- Un examen de l'expression de N montre directement que K représente « l'effectif maximum de la population dans le milieu ». Pourquoi ?
- Esquisser N pour $K = 3N_0/2$, $K = 2N_0$, $K = 4N_0$.
- En utilisant ce modèle, quelle doit être la relation entre K et N_0 pour que la vitesse d'accroissement[4] de la population atteigne un maximun après un certain temps ?

9. Le coeur humain bat environ 70 fois par minute et chaque battement déplace environ 180 g de sang. Quelle est la masse, en tonnes, de sang déplacé en 10 ans (1 an = 365 jours) ?

10. L'eau couvre environ 70 % de la surface de la Terre ce qui représente approximativement une aire de $3,57 \times 10^{10}$ ha. Sachant que l'aire de la sphère de rayon R vaut $4\pi R^2$ et son volume $\frac{4}{3}\pi R^3$, si on prend 3 comme valeur approchée de π, le volume en km^3 de la Terre vaut approximativement

☐ $1,1 \times 10^9$ ☐ $1,1 \times 10^{12}$ ☐ $1,1 \times 10^{15}$ ☐ $1,1 \times 10^{18}$
☐ aucune des réponses proposées n'est correcte

11. Le volume de la Lune est approximativement de 22 10^9 km^3. Quelle partie du volume de la Terre cela représente-t-il ?
☐$\frac{1}{5}$ ☐$\frac{1}{50}$ ☐$\frac{1}{500}$ ☐$\frac{1}{5000}$ ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte

12. Sachant que le volume de la Lune est approximativement de 22 10^9 km^3, que vaut approximativement son diamètre ?
☐350km ☐3500km ☐1750km ☐17500 ☐35 10^3 ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte

[1] Verhulst, 1838
[2] dans le cas où le taux d'accroissement intrinsèque r est égal à 0.75
[3] appelée « capacité biotique du milieu »
[4] c'est-à-dire la dérivée de N