Liste « type » 6
Répétitions Math 10, Math 11 ; semaines 10, 11

Matière : Un « essentiel » sur l'intégration à une variable

Exercices sur la matière vue au cours

1. Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

$$\int_{-1}^{2}(x^2+2x)\ dx \qquad \int_{-1}^{1} xe^{-x}\ dx \qquad \int_{0}^{1} xe^{-x^2}\ dx \qquad \int_{1/2}^{3}\sqrt{3-\frac{x}{2}}\ dx$$
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\cos^2 x\ dx \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/3}\tan^2 x\ dx \qquad \int_{0}^{\pi} x\cos^2 x\ dx \qquad \int_{0}^{\pi/2}\sin x\cos^2 x\ dx$$
$$\int_{0}^{1}\ln(x^2)\ dx \qquad \int_{-1}^{e} x\ln(|x|))\ dx \qquad \int_{-2}^{4}\frac{x+3}{x+4}\ dx \qquad \int_{0}^{\pi/3}\sin(2x)\ e^{-x}\ dx$$
$$\int_{0}^{1}\operatorname{arctg} x\ dx$$

2. Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{9x^2+4}\ dx \qquad \int_{-\infty}^{-2}\frac{1}{9x^2-4}\ dx \qquad \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+1}\ dx$$
$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\ dx \qquad \int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x-3}\ dx \qquad \int_{\pi/3}^{+\infty}\sin(2x)\ e^{-x}\ dx$$

3. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante

$$\{(x,y) : x\in[0,2\pi], y\in\mathbb{R} \text{ et } \sin x\leq y\leq\cos x\}.$$

Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

Exercices pour TD ou « devoirs »

1. Dans un refuge de montagne, on a des vivres pour 180 jours. Si le nombre de personnes présentes augmente de 1/5 et si l'on diminue la ration de chaque personne de 1/11, pour combien de jours y a-t-il encore des vivres ? (Rép. : 165 jours)
2. Un arc de cercle est intercepté par un angle au centre de 24°. Quelle est la longueur de cet arc en dm si le rayon du cercle mesure 9 dm ? (Rép. : 3,77 dm)
3. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante et donner une représentation graphique de cet ensemble.

$$\left\{(x,y) : x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R} \text{ et } 0\leq y\leq\inf\{e^{-x},e^{x}\}\right\}.$$

4. Calculer

$$\int_{0}^{e}\ln x\ dx$$

et interpréter graphiquement le résultat.

5. Déterminer (si possible) les intégrales suivantes

$$\int_{0}^{\pi/4}\sin x\cos(3x)\ dx, \qquad \int_{-\infty}^{\ln 2} xe^{x}\ dx, \qquad \int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

6. – Si la somme de deux fonctions f, g est intégrable sur $[0,1]$ alors l'intégrale de la somme $f+g$ est égale à la somme des intégrales de f et g. Vrai☐ Faux☐
   – Si f, g sont deux fonctions continues et intégrables sur $[0,+\infty[$ alors
   a) toute combinaison linéaire de f et g est aussi intégrable sur$[0,+\infty[$
   b) l'intégrale d'une combinaison linéaire de f et g est égale à la combinaison linéaire des intégrales.
   Exprimer mathématiquement la partie b) du résultat énoncé ci-dessus.
   – Une fonction continue sur $[0,2[$ est toujours intégrable sur $[0,2[$ Vrai☐ Faux☐
   – Une fonction continue sur $[0,2[$ est toujours intégrable sur $[0,1]$ Vrai☐ Faux☐
   – Qu'appelle-t-on largeur d'un découpage ?
   – On donne le découpage suivant de l'intervalle $[0,1]$:
   $$0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1.$$
   Que vaut la largeur de ce découpage ?
   – Si on augmente le nombre de points d'un découpage, on diminue toujours sa largeur.
   Vrai☐ Faux☐
7. Soit r le rayon d'une artère cylindrique de longueur l et soit x la distance d'une cellule de sang (supposée ponctuelle) au centre de la section circulaire qui la contient. Le volume V par unité de temps du flux du sang à travers l'artère est
   $$V = \int_0^r \frac{k}{l} x(r^2 - x^2) dx$$
   où k est une constante dépendant de la différence de pression aux deux extrémités de l'artère et de la viscosité du sang. Calculer V
8. Supposons que deux électrons soient séparés par une distance a. S'il est possible de ramener les deux électrons au même point, la quantité de travail requis pour contrebalancer la répulsion électrostatique des deux électrons est
   $$\int_0^a \frac{k}{r^2} dr$$
   où k est une constante strictement positive. Est-il possible d'effectuer cela ? Expliquer votre réponse.
   Supposons maintenant qu'un proton et un électron soient séparés par une distance a. S'il est possible de rejeter l'électron arbitrairement loin du proton, la quantité de travail requis pour contrebalancer l'attraction électrostatique entre les deux particules est
   $$\int_a^\infty \frac{k}{r^2} dr$$
   Est-il possible d'effectuer cela ? Expliquer votre réponse.
9. En cartographie, sur une carte de Mercator, l'ordonnée d'un point proche de l'équateur et dont la latitude est φ, est donnée par
   $$y(\varphi) = R \int_0^\varphi \frac{1}{\cos u} du.$$
   Montrer que
   $$y = R \ \ln\left(\left| \text{tg}(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}) \right| \right).$$