Se poser des questions ...

QUESTIONS relatives aux suites
et encore au nombre d'or (octobre 2008)

La suite de Fibonacci est l'une des suites mathématiques les plus connues. Elle doit son nom au mathématicien italien Leonardo Pisano, plus connu sous le pseudonyme de Fibonacci (1175 - 1250). Dans un problème posé dans un de ses ouvrages, le "Liber Abaci", Fibonacci décrit la croissance d'une population de lapins :

Possédant initialement un couple de lapins, combien de couples obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?

Ce problème est à l'origine de la suite dont le n-ème terme correspond au nombre de paires de lapins au n-ème mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :
- le premier mois, il y a juste une paire de lapereaux
- les lapereaux ne sont pubères qu'à partir du deuxième mois
- chaque mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux
- les lapins ne meurent jamais.

FB, 07/10/08

QUESTIONS relatives aux suites
et encore au nombre d'or (octobre 2008) —suite

Suggestion

Notons $\mathcal{F}_n$ le nombre de couples de lapins au mois n. Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple (ce qu'on note $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 1$). Dès le début du troisième mois, le couple de lapins a deux mois et il engendre un autre couple de lapins. On note alors $\mathcal{F}_3 = 2$. Plaçons-nous maintenant au mois n et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard $n+2$: $\mathcal{F}_{n+2}$ désigne la somme des couples de lapins au mois $n+1$ et des couples nouvellement engendrés. Or, n'engendrent au mois $n+2$ que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant (au mois n). On a donc :

$$\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$$

Nous obtenons ainsi la forme récurrente de la suite de Fibonacci : chaque terme de cette suite est la somme des deux termes précédents ; pour obtenir chacun de ces deux termes, il faut faire la somme de leurs termes précédents... et ainsi de suite, jusqu'à ce que ces deux termes soient les deux termes initiaux, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, qui sont connus.

Au douzième mois, on a $\mathcal{F}_{12} = 144$.

Le taux de croissance des nombres de Fibonacci, c'est-à-dire

$$\frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n}$$

converge vers le nombre d'or. Pourquoi?

FB, 25/10/08