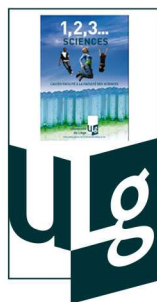

Université
de Liège



1, 2, 3...Sciences

Année académique 2008-2009

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES 2008-2009 : TD SEMAINE 1

1. Calculer (x est un réel négatif) $\sqrt{(-3)^4}$, $\sqrt{9x^2}$,
2. La vitesse d'Apollo X était de 39 867 km/h. Quelle était la vitesse de cette fusée en m/s ?
3. Sur Terre, une pression de 1 atmosphère correspond approximativement à
 - ☐ une masse de 1kg répartie sur 1m²
 - ☐ une masse de 1kg répartie sur 1dm²
 - ☐ une masse de 1kg répartie sur 1cm²
 - ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
4. Combien de m³ d'eau de mer doit-on prendre pour en retirer 615 kg de sel si 1 l de cette eau pèse 1,025 kg et contient 3 % de son poids en sel ?
5. Résoudre (x est l'inconnue réelle) $3x^3 + 2x^2 = x$, $\frac{1}{x^3} \geq \frac{1}{x}$
6. Représenter graphiquement la courbe dont l'équation cartésienne est $|xy| = 1$.
7. En optique, dans le cas d'un miroir sphérique, on a la formule suivante $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$
où p (respectivement q) représente la distance du miroir à l'objet (respectivement à l'image) et où f est la distance focale du miroir. Ainsi, la distance de l'objet au miroir vaut
 - ☐ $f - q$
 - ☐ $\frac{fq}{q - f}$
 - ☐ $\frac{fq}{f - q}$
 - ☐ $\frac{q - f}{fq}$
 - ☐ aucune des réponses proposées n'est correcte

8. a) Sur la Terre, la distance entre le pôle nord et l'équateur est approximativement égale à
☐ 10^3 m ☐ 10^5 m ☐ 10^6 m ☐ 10^7 m ☐ 10^{12} m ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte
 b) Convertir votre réponse en km.

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES 2008-2009 : CORRECTION DU TD SEMAINE 1

1. $\sqrt{(-3)^4} = (-3)^2 = 9$ $\sqrt{9x^2} = 3|x| = -3x$ puisque x est un réel négatif.
2. Comme 1 km = 1 000 m et que 1 h = 3 600 sec, on sait que la fusée effectue 39 867 000 m en 3 600 sec. Sa vitesse en m/sec est donc de $\frac{39\,867\,000}{3\,600} = 11\,074$ m/sec.
3. Considérons que 1 atm = 10^5 Pa et que l'accélération due à la pesanteur vaut 10 m/sec². Comme une pression est le quotient d'une force par une surface et qu'une force est le produit d'une masse par une accélération, on a $10^5 = \frac{1 \cdot 10}{S}$ où S est une surface exprimée en m². Dès lors, $S = 10^{-4}$ m² c'est-à-dire $S = 1$ cm². Ainsi, une pression d'une atmosphère correspond approximativement à une masse de 1 kg répartie sur 1 cm².
4. Le poids de sel dans un litre d'eau vaut : $1,025 \cdot 0,03 = 0,03075$ kg.
 Puisqu'on a 0,03075 kg de sel dans 1 litre d'eau, le nombre de litres d'eau nécessaires pour fournir 615 kg de sel vaut : $\frac{1}{0,03075} \cdot 615 = 20\,000$ litres. Comme 1 m³ correspond à 1 000 litres, 20 m³ d'eau de mer sont nécessaires pour fournir 615 kg de sel.
5. On a $3x^3 + 2x^2 = x \Leftrightarrow 3x^3 + 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(3x^2 + 2x - 1) = 0$ et un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs au moins est nul. Dès lors, on a $x = 0$ ou $3x^2 + 2x - 1 = 0$. Pour résoudre l'équation du second degré, on calcule $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$ et les solutions de l'équation sont alors

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{-2-4}{6} = -1 \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation donnée est donc $S = \left\{0, \frac{1}{3}, -1\right\}$.

L'inéquation $\frac{1}{x^3} \geq \frac{1}{x}$ est définie si $x \neq 0$. Elle est équivalente à

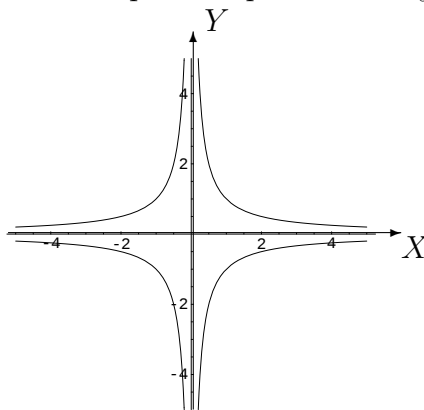
$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^3} \geq 0.$$

Etudions le signe de la fraction ; on a

x		-1		0		1	
$1-x^2$	-	0	+	+	+	0	-
x^3	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{1-x^2}{x^3}$	+	0	-	$\cancel{0}$	+	0	-

Ainsi, l'ensemble des solutions est $S =]-\infty, -1] \cup]0, 1]$.

6. L'équation $|xy| = 1$ est équivalente à $(xy = 1 \text{ ou } xy = -1)$. Comme le produit xy n'est pas nul, ses facteurs ne le sont pas non plus et on a $y = \frac{1}{x}$ ou $y = -\frac{1}{x}$.



7. Comme $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, la distance p de l'objet au miroir s'obtient de la façon suivante :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{q} = \frac{q-f}{fq} \Leftrightarrow p = \frac{fq}{q-f}.$$

8. On sait (cf. Journal de Bord) que la circonférence de la Terre à l'équateur vaut $4008 \cdot 10^4$ m. Dès lors, la distance entre le pôle nord et l'équateur vaut approximativement le quart de cette valeur donc $10^3 \cdot 10^4$ m c'est-à-dire 10^7 m = 10^4 km.