Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2008-2009

Mathématiques générales 2008-2009 : TD semaine 13

1. Montrer que la fonction $\tan t + \dfrac{1}{\cos t},\ t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ vérifie l'équation $2\dfrac{dy}{dt} - y^2 = 1$.

   Même question avec la fonction $\sin(2x) - \cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$ et l'équation $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

   Note : les dérivées première et seconde de $f(x),\ x \in I$ s'écrivent parfois $\dfrac{df}{dx},\ \dfrac{d^2f}{dx^2}$

2. Déterminer la valeur de la constante c de telle sorte que la fonction $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle

$$c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

3. Résoudre les équations différentielles suivantes en spécifiant dans quel intervalle on travaille

   a) $Df(x) - f(x) = \cos(2x)$ *b)* $D^2f(x) + 6Df(x) + 9f(x) = x^2$

Mathématiques générales 2008-2009 : solutions du TD semaine 13

1. En remplaçant $\dfrac{dy}{dt}$ par $\dfrac{1+\sin(t)}{\cos^2(t)}$ et y^2 par $\left(\dfrac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right)^2$, on voit que l'équation est vérifiée.
De même, si on remplace $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ par $-4\sin(2x)+4\cos(2x)$ et $4y$ par $4\sin(2x)-4\cos(2x)$, on voit que l'équation est vérifiée.

2. La valeur de la constante c est $\dfrac{1}{4}$.

3. a) Les solutions sont données par $f(x)=Ce^x-\dfrac{1}{5}\cos(2x)+\dfrac{2}{5}\sin(2x),\ x\in\mathbb{R},\ C$ étant une constante complexe arbitraire.
b) Les solutions sont données par $f(x)=(C_1x+C_2)e^{-3x}+\dfrac{1}{27}(3x^2-4x+2),\ x\in\mathbb{R},$ C_1 et C_2 étant des constantes complexes arbitraires.