1, 2, 3...Sciences

Année académique 2008-2009

Mathématiques générales 2008-2009 :
TD du 17 décembre 2008
Calcul intégral et équations différentielles

1. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes

$$1)\ \int_1^4 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx \qquad 2)\ \int_0^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx \qquad 3)\ \int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx$$

2. La vitesse moyenne des molécules dans un gaz parfait est donnée par

$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\,dv$$

où M est le poids moléculaire du gaz, R la constante du gaz et T sa température. Que vaut $\overline{v}$?

Suggestion : $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,.\,x^2 e^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\int t e^t\,dt\right]_{t=x^2}$

3. Vérifier que

$f(x) = \cos(\ln(x)) - \sin(\ln(x)) + 1,\ x > 0$ est solution de $x^2D^2f(x) + xDf(x) + f(x) = 1.$

4. Résoudre les équations suivantes en précisant l'ensemble sur lequel on travaille

$$a)\ \begin{cases} 4D^2f(x) + f(x) = \sin(\frac{x}{2}) \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 1 \end{cases} \qquad\qquad b)\ xDf(x) - f(x) = x\ln(x)$$

TD du 17 décembre 2008 : calcul intégral et équations différentielles (solutions)

---

1. Pour la première intégrale, la primitivation s'effectue par substitution en posant $\dfrac{1}{x} = t$ et on obtient $\dfrac{4\sqrt{2}}{3} - \dfrac{5\sqrt{5}}{12}$.

   La deuxième fonction n'est pas intégrable en 1.

   Pour prouver l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$, il suffit d'appliquer la définition. La primitivation s'effectue par substitution en posant $\ln(x) = t$. Dès lors, la troisième intégrale vaut 1.

2. On prouve l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$ par application du critère en θ par exemple.

   La vitesse moyenne des molécules vaut $\overline{v} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$.

3. La dérivée première de f vaut $Df(x) = -\frac{1}{x}(\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x)))$ et sa dérivée seconde vaut $D^2f(x) = \frac{2}{x^2}\sin(\ln(x))$.

4. a) Les zéros du polynôme caractéristique sont $-\frac{i}{2}$ et $\frac{i}{2}$ et l'ensemble des solutions de l'équation homogène est donné par

   $$f_H(x) = C_1 e^{-\frac{ix}{2}} + C_2 e^{\frac{ix}{2}},\ x \in \mathbb{R} \text{ avec } C_1, C_2 \text{ constantes arbitraires complexes.}$$

   On peut également écrire cet ensemble de solutions sous la forme

   $$f_H(x) = C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

   Une solution particulière de $4D^2f(x) + f(x) = e^{\frac{ix}{2}}$ est une fonction du type $F(x) = Axe^{\frac{ix}{2}}$ où A est une constante à déterminer. La dérivée seconde de cette fonction vaut $D^2F(x) = (i - \frac{x}{4})Ae^{\frac{ix}{2}}$ et on obtient une solution particulière de l'équation donnée sous la forme $f_P(x) = \Im\big(\frac{-ix}{4}(\cos(\frac{x}{2}) + i\sin(\frac{x}{2}))\big) = -\frac{x}{4}\cos(\frac{x}{2}),\ x \in \mathbb{R}$.
   En tenant compte des conditions initiales, la solution du système a) est la fonction

   $$f(x) = \frac{5}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

   b) Comme $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx \simeq \ln(x),\ x > 0$ et que $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ln(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}\ln^2(x),\ x > 0$, l'ensemble des solutions de l'équation b) est donné par

   $$f(x) = x(C + \frac{1}{2}\ln^2(x)),\ x > 0,$$

   C étant une constante arbitraire complexe.

Mathématiques générales 2008-2009 :
TD du 17 décembre 2008
Calcul intégral et fonctions de plusieurs variables

---

1. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes

$$1) \int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\, dx \qquad 2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx \qquad 3) \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$$

   Comment interpréter graphiquement le résultat obtenu pour la troisième intégrale ?

2. On fixe un repère orthonormé du plan. Calculer l'aire de l'ensemble dont une description analytique est donnée par

$$\left\{(x,y) : x \in [-1,2],\ y \in \mathbb{R}, -\left|\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right| \leq y \leq \left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|\right\}$$

   et donner une représentation graphique de cet ensemble.

3. On donne la fonction $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 - 4y^2 + 1}$.
   (a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f.
   (b) Dans un repère orthonormé, représenter le domaine de dérivabilité en le hachurant.
   (c) Si c'est possible, calculer $(D_x\ f)(0,1)$ et $(D_y\ f)(1,0)$.

4. (a) On donne une fonction f, continûment dérivable sur $]\frac{1}{2}, 2[\times]-1,1[$ et on définit $F(t) = f\left(\frac{t}{t+1}, \frac{t+1}{t}\right)$. Déterminer l'ensemble où F est dérivable.
   (b) Sachant que $(D_x f)\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right) = 5, \quad (D_y f)\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right) = 2$, déterminer si possible la valeur de la dérivée première de F en $t = -4$.

5. Dans le plan, déterminer le gradient de la fonction définie par $f(x,y) = \sqrt{1+xy^2}$ au point de coordonnées $(1,1)$.

TD DU 17 DÉCEMBRE 2008 :

CALCUL INTÉGRAL ET FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES (SOLUTIONS)

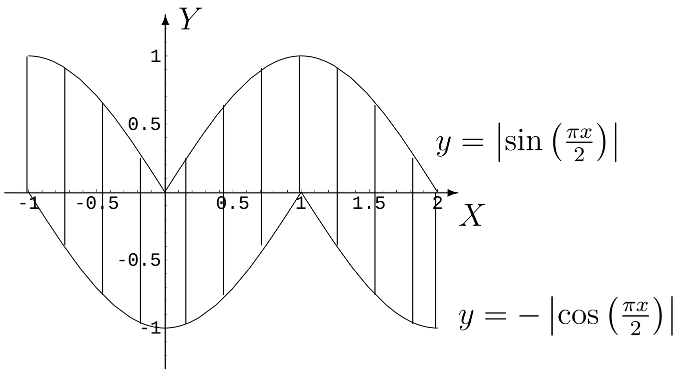
---

1. Pour la première intégrale, la primitivation s'effectue par substitution en posant $\ln(x) = t$. Dès lors, cette intégrale vaut 2.

   On prouve l'intégrabilité de la fonction de la deuxième intégrale en 0^+ et en $+\infty$ par application du critère en θ par exemple. La primitivation s'effectue par changement de variables en posant $x = t^2,\ t > 0$. Ainsi, la deuxième intégrale vaut π.

   On prouve l'intégrabilité de la fonction de la troisième intégrale en $-\infty$ et en $+\infty$ par application du critère en θ par exemple. La primitivation s'effectue par substitution en posant $-x^2 = t$ et la troisième intégrale vaut 0.
   Interprétation graphique : l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et le graphique de la fonction lorsque la variable est négative est égale à celle de la partie du plan délimitée par les mêmes éléments lorsque la variable est positive.

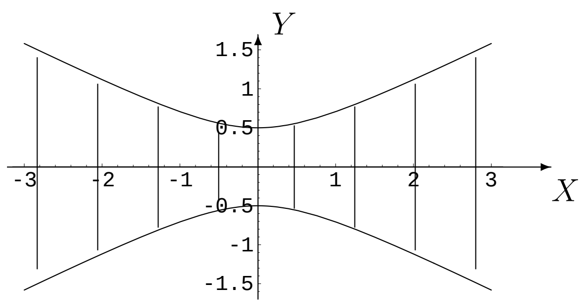
2. Voici une représentation graphique de l'ensemble :



   L'aire demandée vaut $\dfrac{12}{\pi}$.

3. (a) Le domaine de définition de f est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 + 1 \geq 0\}$; son domaine de dérivabilité est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 + 1 > 0\}$.

   (b) Voici la représentation graphique du domaine de dérivabilité de f, les points de l'hyperbole étant exclus de l'ensemble.



   (c) Le point de coordonnées $(0, 1)$ n'appartient pas au domaine de dérivabilité de la fonction. Il est donc impossible de calculer $(D_x\ f)(0, 1)$. Par contre, comme $(D_y\ f)(x, y) = \dfrac{-4y}{\sqrt{x^2 - 4y^2 + 1}}$, on a $(D_y\ f)(1, 0) = 0$.

4. Les fonctions $f_1(t) = \dfrac{t}{t+1}$ et $f_2(t) = \dfrac{t+1}{t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. De plus, on doit avoir $\dfrac{1}{2} < \dfrac{t}{t+1} < 2$ et $-1 < \dfrac{t+1}{t} < 1$.

   Dès lors, la fonction F est dérivable sur $]-\infty, -2[$ et on a

$$DF(t) = (D_1 f)\left(\frac{t}{t+1}, \frac{t+1}{t}\right) \cdot \frac{1}{(t+1)^2} + (D_2 f)\left(\frac{t}{t+1}, \frac{t+1}{t}\right) \cdot \left(\frac{-1}{t^2}\right).$$

   Ainsi, $(DF)(-4) = \dfrac{31}{72}$.

5. Le gradient a pour composantes $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Mathématiques générales 2008-2009 :

TD du 17 décembre 2008

Equations différentielles et fonctions de plusieurs variables

---

1. Vérifier que $\quad f(x) = 2x + 1 - \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \; x \in]-1, 1[\quad$ est solution de $(1-x^2)D^2 f(x) - 2xDf(x) + 2f(x) = 0$.
2. Résoudre les équations suivantes en précisant l'ensemble sur lequel on travaille

   $a)$ $\begin{cases} D^2 f(x) + 2Df(x) + 2f(x) = e^{-x}\cos(x) \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 2 \end{cases}$ $\qquad$ $b)$ $Df(x) - \mathrm{tg}(x)f(x) = \sin(x)$

3. On donne la fonction $f : (x, y) \mapsto \mathrm{arcos}(x + y^2 + 1)$.
   (a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f.
   (b) Dans un repère orthonormé, représenter le domaine de dérivabilité en le hachurant.
   (c) Si c'est possible, calculer $(D_x\ f)(-1, 0)$ et $(D_y\ f)(0, -1)$.
4. Soit $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$ où
$$u(1,0) = 2, \quad (D_s u)(1,0) = -2, \quad (D_t u)(1,0) = 6$$
$$v(1,0) = 3, \quad (D_s v)(1,0) = 5, \quad (D_t v)(1,0) = 4$$
$$(D_u F)(2,3) = -1 \quad \text{et} \quad (D_v F)(2,3) = 10.$$
   a) Quelles sont les hypothèses à satisfaire par les différentes fonctions pour que W soit dérivable ?
   b) Dans ces conditions, que valent $(D_s W)(1,0)$ et $(D_t W)(1,0)$?
5. Dans le plan, déterminer le gradient de la fonction définie par $f(x, y) = \ln(2x + x^3 y)$ au point de coordonnées $(1, 2)$.

TD du 17 décembre 2008 : équations différentielles et fonctions de plusieurs variables (solutions)

---

1. La dérivée première de f vaut $Df(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{x}{1-x^2}$ et sa dérivée seconde vaut $D^2f(x) = \frac{-2}{(1-x^2)^2}$.
2. a) Les zéros du polynôme caractéristique sont $-1+i$ et $-1-i$ et l'ensemble des solutions de l'équation homogène est donné par

   $$f_H(x) = C_1 e^{(-1+i)x} + C_2 e^{(-1-i)x},\ x \in \mathbb{R} \text{ avec } C_1, C_2 \text{ constantes arbitraires complexes.}$$

   On peut également écrire cet ensemble de solutions sous la forme

   $$f_H(x) = e^{-x}(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)),\ x \in \mathbb{R}.$$

   Une solution particulière de $D^2f(x)+2Df(x)+2f(x) = e^{(-1+i)x}$ est une fonction du type $F(x) = Axe^{(-1+i)x}$ où A est une constante à déterminer. Les dérivées première et seconde de cette fonction valent respectivement

   $$Df(x) = (A + (-1+i)Ax)e^{(-1+i)x} \text{ et } D^2F(x) = ((-1+i)2A - 2iAx)e^{(-1+i)x}$$

   et on obtient une solution particulière de l'équation donnée sous la forme

   $$f_P(x) = \Re\left(\frac{-ix}{2}e^{-x}(\cos(x) + i\sin(x))\right) = \frac{x}{2}e^{-x}\sin(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

   En tenant compte des conditions initiales, la solution du système a) est la fonction

   $$f(x) = \left(\frac{x}{2} + 2\right)e^{-x}\sin(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

   b) Comme

   $$\int \operatorname{tg}(x)\ dx \simeq -\ln(\cos(x)),\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

   et comme

   $$\int \sin(x)\cos(x)\ dx \simeq -\frac{\cos(2x)}{4},\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

   l'ensemble des solutions de l'équation b) est donné par

   $$f(x) = \frac{1}{\cos(x)}\left(C - \frac{\cos(2x)}{4}\right),\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

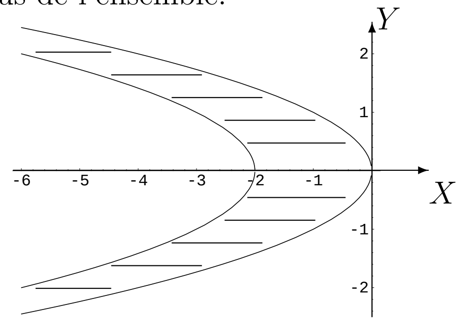
   C étant une constante arbitraire complexe.
3. (a) Le domaine de définition de f est l'ensemble

   $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x + y^2 + 1 \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x + y^2 \leq 0\};$$

   son domaine de dérivabilité est

   $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x + y^2 + 1 < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x + y^2 + 1 < 0\}.$$

(b) Voici la représentation graphique du domaine de dérivabilité de f, les points des paraboles étant exclus de l'ensemble.



(c) Le point de coordonnées $(0,-1)$ n'appartient pas au domaine de dérivabilité de la fonction. Il est donc impossible de calculer $(D_y\ f)(0,-1)$. Par contre, comme $D_x f(x,y) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(x+y^2+1)^2}}$, on a $(D_x\ f)(-1,0) = -1$.

4. a) Les hypothèses sont les suivantes :
1) F fonction continûment dérivable sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$
2) u, v fonctions dérivables sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\{(u(s,t), v(s,t)) : (s,t) \in \Omega\} \subset U$$

b) Dans ces conditions, $(D_s W)(1,0) = 52$ et $(D_t W)(1,0) = 34$.
En effet, on a

$$(D_s W)(s,t) = (D_u F)(u(s,t), v(s,t)) \ . \ (D_s u)(s,t) + (D_v F)(u(s,t), v(s,t)) \ . \ (D_s v)(s,t)$$

et une expression analogue pour $(D_t W)(s,t)$.

5. Le gradient a pour composantes $\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$.