# Mathématiques générales A, 2008/2009
# Examen de janvier 2009

---

Réponse type à la question de théorie

***Quelle est la forme explicite de la dérivée de la fonction* arcos*? Démontrer ce résultat.***

Forme explicite.
La fonction arcos est dérivable dans l'intervalle $]-1,1[$ et on a

$$D\,\mathrm{arcos}\,x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in ]-1,1[.$$

Démonstration.
La démonstration de ce résultat repose
- sur l'application du théorème donnant la dérivabilité et l'expression de la dérivée de l'inverse d'une fonction bijective dérivable
- et sur la manipulation de propriétés trigonométriques de base.

Pour une fonction bijective dérivable $f : ]a,b[ \to ]c,d[$ telle que $Df(x) \neq 0$ quel que soit $x \in ]a,b[$, la théorie dit que l'inverse de $f$ est dérivable sur $]c,d[$ et que sa dérivée est donnée par

$$D_x f^{-1}(x) = \frac{1}{D_X f(X)},\ X = f^{-1}(x),\ x \in ]c,d[.$$

Dans le cas présent, on a $f = \cos$, $f^{-1} = \mathrm{arcos}$, $]a,b[=]0,\pi[$, $]c,d[=]-1,1[$ avec

$$D\cos x = -\sin x \neq 0, \quad \forall x \in ]0,\pi[.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} D\,\mathrm{arcos}\,x &= \frac{1}{D_X \cos X},\ X = \mathrm{arcos}\,x,\ x \in ]-1,1[ \\ &= -\frac{1}{\sin(\mathrm{arcos}\,x)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\mathrm{arcos}\,x)}}\ (*) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (**). \end{aligned}$$

Justification (*):
on a $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, donc

$$\sin(\mathrm{arcos}\,x) = \sqrt{1-\cos^2(\mathrm{arcos}\,x)}$$

car $y = \mathrm{arcos}\,x$ est un réel appartenant à l'intervalle $]0,\pi[$ pour $x \in ]-1,1[$ et $\sin y > 0$ pour $y \in ]0,\pi[$.
Justification (**):
on a $\cos(\mathrm{arcos}\,x) = x$ pour $x \in ]-1,1[$ (propriété des fonctions inverses).

FB, 22/01/09