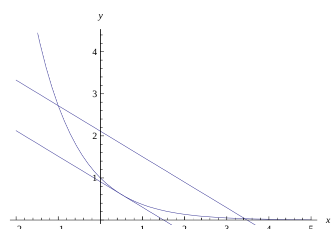
Mathématiques générales A, Examen du lundi 17/08/09
Sections biologie, chimie, géographie, géologie, informatique, philosophie et physique

CORRECTION (résumé)

Question de théorie

(a) Enoncer le théorème des accroissements finis en toute généralité.
(b) Ensuite l'appliquer au cas de la fonction $x \mapsto e^{-x}$, tracer le graphique de cette fonction dans un repère orthonormé et donner une interprétation graphique du théorème.

Solution. (a)Voir cours et notes de cours.
(b) La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est à valeurs réelles et est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, il existe un point u compris entre x et y tel que $f(x) = f(y) + (x - y)Df(u)$, ce qui s'écrit aussi $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = Df(u)$ lorsque $x \neq y$. Le théorème peut s'interpréter graphiquement comme suit dans le cas de points distincts. Quels que soient les points distincts $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ du graphe de f, il existe un autre point de ce graphe, notons-le $(u, f(u))$, dont l'abscisse est comprise entre x et y et en lequel la tangente au graphique de la fonction est parallèle à la droite qui passe par les points de coordonnées cartésiennes $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.



Exercices

1. **Résoudre l'équation suivante (on suppose que** $x \in [0, 2\pi]$)

$$2\sin^2(2x) = 1.$$

Solution. On a

$$\begin{aligned}2\sin^2(2x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow \quad \left(\sin(-2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{8} + k\pi\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\sin(-2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{7\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8} + k\pi\end{aligned}$$

Comme on demande les solutions (x) qui appartiennent à $[0, 2\pi]$, on obtient

$$2\sin^2(2x) = 1 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{7\pi}{8},\ \frac{9\pi}{8},\ \frac{11\pi}{8},\ \frac{13\pi}{8} \text{ et } \frac{15\pi}{8}\right\}.$$

2. **Si elle existe, déterminer la limite suivante**

$$\lim_{x\to-\infty} \exp\left(-\frac{1}{|x-1|}\right).$$

Solution. Comme la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{|x-1|}\right)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ensemble non minoré, la limite de ses valeurs lorsque x tend vers $-\infty$ peut être considérée. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{|x-1|}\right) = 0^- \text{ et } \lim_{y\to 0^-} \exp(y) = 1^-.$$

Dès lors,

$$\lim_{x\to-\infty} \exp\left(-\frac{1}{|x-1|}\right) = \lim_{y\to 0^-} \exp(y) = 1^-.$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_0^{\pi/6} \sin(2x)\ dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\ dx.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[0, \frac{\pi}{6}]$. Cela étant, on a

$$\int_0^{\pi/6} \sin(2x)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} 2\sin(2x)\ dx = -\frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\pi/6} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$, cette fonction est donc intégrable sur $[0, t]$ et on a

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{4+x^2}\ dx &= \frac{1}{4}\int_0^t \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\ dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{4+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4+x^2}$ est à valeurs positives, la limite précédente donne son intégrabilité et la valeur de son intégrale sur $[0, +\infty[$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\ dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{4+x^2}\ dx = \frac{\pi}{4}.$$

4. **On donne la fonction f de manière explicite par**

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(2x - y).$$

   (a) Quel est le domaine de dérivabilité de f ?
   (b) Déterminer l'expression explicite de ses dérivées partielles en tout point de ce

domaine.
(c) Si possible, déterminer la valeur des dérivées partielles au point $(1,-1)$
Solution. (a) Le domaine de dérivabilité de f est $\mathbb{R}^2$.

(b) En tout point du domaine de dérivabilité, on a

$$D_x f(x,y) = \frac{2}{1+(2x-y)^2} \quad \text{et} \quad D_y f(x,y) = \frac{-1}{1+(2x-y)^2}.$$

(c) Le point de coordonnées cartésiennes $(1,-1)$ appartient au domaine de dérivabilité de f et on a

$$(D_x f)(1,-1) = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad (D_y f)(1,-1) = \frac{-1}{10}.$$

5. **(a) Montrer que la fonction** $x \mapsto \mathrm{tg}x + \dfrac{1}{\cos x},\ x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, **vérifie l'équation différentielle**

$$2Df - f^2 = 1.$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - 9Df(x) = 1$$

Solution. (a) La fonction donnée est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a

$$D\left(\mathrm{tg}x + \frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x},\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Dès lors, pour tout $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, on a

$$\begin{aligned} 2Df - f^2 &= \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{2\ \sin x}{\cos^2 x} - \mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2\ \mathrm{tg}x}{\cos x} \\ &= \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{2\ \sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2\ \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1. \end{aligned}$$

(b) L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

L'équation homogène associée est $D^2 f(x) - 9Df(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 - 9z = z(z-9)$ dont les zéros sont 0 et 9. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 + c_2 e^{9x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes arbitraires.

On voit immédiatement qu'une solution particulière est la fonction $f_0(x) = -\dfrac{x}{9},\ x \in \mathbb{R}$.

Finalement, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 + c_2 e^{9x} - \frac{x}{9},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes arbitraires.

Problème élémentaire

Un pharmacien doit préparer une solution de 14 ml qui contient 7% d'arsenic. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 12% d'arsenic et l'autre seulement 5%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?

Solution. Soit x le nombre de ml de la solution contenant 12% d'arsenic. Le nombre de ml de la solution contenant 5% d'arsenic est donc $(14 - x)$. Cela étant, on a

$$\frac{12}{100} \,.\, x + \frac{5}{100} \,.\, (14 - x) = \frac{7}{100} \,.\, 14$$

ce qui est équivalent à $7x = 28$ ou encore $x = 4$.

Ainsi, le pharmacien doit prendre 4 ml de la solution contenant 12% d'arsenic et 10 ml de l'autre solution.

QCM

Question 1 Si r est un réel strictement négatif, alors $|r| - 1$ vaut

1) $r - 1$

2) ♣ $-r - 1$

3) $1 - r$

4) $1 + r$

5) aucune des réponses précédentes n'est correcte

Question 2 Dans un repère orthonormé, l'équation cartésienne $y^2 = 2x - x^2$ est l'équation

1) d'une droite

2) ♣ d'un cercle

3) d'une hyperbole

4) d'une parabole

5) aucune des réponses précédentes n'est correcte

Question 3 Parmi les polynômes (en z) donnés explicitement ci-dessous, lequel a $i - 1$ comme zéro ?

1) ♣ $z^2 + 2i$

2) $z^2 - 1$

3) $z^3 - 1$

4) $1 - z^4$

5) aucune des réponses précédentes n'est correcte

Question 4 Un aventurier prend le départ et s'engage dans le désert muni d'une gourde remplie d'eau. Malheureusement, il trébuche dès la première heure ; la gourde s'ouvre et il perd ainsi déjà 20% du contenu. A la fin de chaque jour, l'aventurier boit un quart du contenu qui lui reste. Après deux jours de marche, la gourde

1) contient encore plus qu'un cinquième mais strictement moins qu'un quart de ce qu'il y avait au départ

2) ♣ contient encore plus qu'un quart mais strictement moins que la moitié de ce qu'il y avait au départ

3) contient encore plus que la moitié mais strictement moins que les trois quarts de ce qu'il y avait au départ

4) est vide

5) aucune des réponses précédentes n'est correcte

Question 5 Un second aventurier prend le départ et s'engage aussi dans le désert muni d'une gourde remplie d'eau. Malheureusement, il trébuche également, dès la première minute ; la gourde s'ouvre et il perd ainsi déjà 20% du contenu. On suppose qu'au départ la gourde contient 3 litres d'eau et qu'à la fin de la journée, l'aventurier boit le quart de la moitié du tiers de ce qu'il a en réserve. Combien de décilitres boit-il ?

1) ♣ 1

2) 2

3) 4

4) 10

5) aucune des réponses précédentes n'est correcte