# Mathématiques générales A, Examen du mercredi 27/05/09
# Sections biologie, chimie, géologie, informatique, philosophie et physique

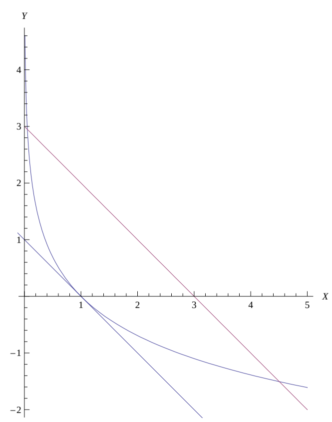
**CORRECTION (résumé)**

---

***Question de théorie***

**(a) Enoncer le théorème des accroissements finis en toute généralité.**
**(b) Ensuite l'appliquer au cas de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, tracer le graphique de cette fonction dans un repère orthonormé et donner une interprétation graphique du théorème.**

*Solution.* (a)Voir cours et notes de cours.
(b) Soit la fonction réelle $x \mapsto \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$ dérivable sur $I = ]0, +\infty[$. Pour tous $x, y \in I$, il existe un point $u$ compris entre $x$ et $y$ tel que $f(x) = f(y) + (x-y)Df(u)$.
Si $x \neq y$ , on a $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = Df(u)$, égalité dont l'interprétation graphique est la suivante : il existe un point d'abscisse $u$ comprise entre $x$ et $y$ en lequel la tangente au graphique de la fonction est parallèle à la droite qui passe par les points de coordonnées cartésiennes $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.




***Exercices***

1. **(a) Résoudre l'équation suivante (on suppose que $x \in [0, 2\pi]$)**

$$2\sin x \ \cos x = 1.$$

**(b) Simplifier au maximum l'expression suivante**

$$\ln\left(\frac{\sqrt{e}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{3})}{\arccos(\frac{1}{2})}\right)$$

*Solution.* (a) Comme $2\sin x \ \cos x = \sin(2x)$, l'équation est équivalente à

$$\sin(2x) = 1.$$

Cela étant, comme $1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, les réels $x$ qui vérifient cette équation sont

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Comme on demande ceux qui appartiennent à $[0, 2\pi]$, il s'agit de

$$\frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{5\pi}{4}.$$

(b) On a $\mathrm{arctg}(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Dès lors,

$$\ln\left(\frac{\sqrt{e}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{3})}{\arccos(\frac{1}{2})}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. **Si elle existe, déterminer la limite suivante**

$$\lim_{x\to 1} \exp\left(-\frac{1}{|x-1|}\right).$$

*Solution.* Comme la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{|x-1|}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, la limite de ses valeurs lorsque $x$ tend vers 1 peut être considérée. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{|x-1|}\right) = -\infty \text{ et } \lim_{y\to-\infty}\exp(y) = 0.$$

Dès lors, la limite demandée vaut 0.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_0^{\pi/6} \sin x\ \cos x\ dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2}\ dx.$$

*Solution.* La fonction $x \mapsto \sin x\ \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ ; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[0, \frac{\pi}{6}]$. Cela étant, comme $\sin x\ \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$, on a

$$\int_0^{\pi/6} \sin x\ \cos x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \sin(2x)\ dx = -\frac{1}{4}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\pi/6} = -\frac{1}{8}+\frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+4x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$, cette fonction est donc intégrable sur $[0, t]$ et on a

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{1+4x^2}\ dx &= \frac{1}{2}\int_0^t 2\ \frac{1}{1+(2x)^2}\ dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{arctg}(2x)\Big]_0^t = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(2t)\end{aligned}$$

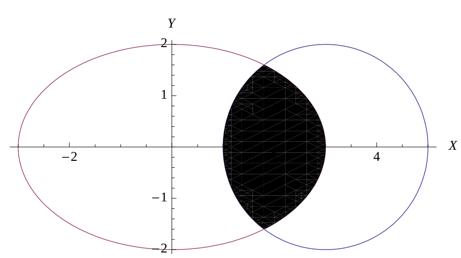
donc

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{1+4x^2}\ dx = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\mathrm{arctg}(2t) = \frac{\pi}{4}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+4x^2}$ est à valeurs positives, la limite précédente donne son intégrabilité et la valeur de son intégrale sur $[0, +\infty[$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{1+4x^2}\ dx = \frac{\pi}{4}.$$

4. **(a) Décrire analytiquement l'ensemble fermé sombre suivant et déterminer les coordonnées cartésiennes des points d'intersection des deux courbes permettant de le décrire.**



**(b) On donne la fonction $f$ de manière explicite par**

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

**(i) Quel est le domaine de dérivabilité de $f$ ?**
**(ii) Déterminer l'expression explicite de ses dérivées partielles en tout point de ce domaine.**
**(iii) Si possible, déterminer la valeur des dérivées partielles au point** $(1, \sqrt{2})$

*Solution.* (a) L'ellipse représentée a pour équation cartésienne $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Le cercle centré au point de coordonnées $(3, 0)$ et de rayon 2 a pour équation cartésienne $(x-3)^2 + y^2 = 4$.
Les coordonnées des points communs aux deux courbes sont solutions du système formé par leurs équations. Ainsi, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ (x-3)^2 + y^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^2 = 4 - (x-3)^2 \\ \frac{x^2}{9} + 1 - \frac{(x-3)^2}{4} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^2 = 4 - (x-3)^2 \\ \frac{x^2}{9} = \frac{(x-3)^2}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{x-3}{2} \\ y^2 = 4 - (x-3)^2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{3} = -\frac{x-3}{2} \\ y^2 = 4 - (x-3)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 9 \\ y^2 = -5 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = \frac{9}{5} \\ y^2 = \frac{64}{25} \end{array}\right. .$$

Le premier système est clairement impossible et le second donne les points de coordonnées $\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$ et $\left(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$. Une description analytique de l'ensemble sombre est donnée par

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, (x-3)^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

et les coordonnées cartésiennes des points d'intersection sont $\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$ et $\left(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$.

(b)(i) Le domaine de dérivabilité de $f$ est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

(ii) En tout point du domaine de dérivabilité, on a

$$D_x f(x,y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \text{ et } D_y f(x,y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

(iii) Le point de coordonnées cartésiennes $(1, \sqrt{2})$ appartient au domaine de dérivabilité de $f$ et on a

$$(D_x f)(1, \sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{3} \text{ et } (D_y f)(1, \sqrt{2}) = \frac{1}{3}.$$

5. **(a) Montrer que la fonction** $x \mapsto \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, **vérifie l'équation différentielle**

$$2Df - f^2 = 1.$$

**(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$9D^2 f(x) - Df(x) = 1$$

*Solution.* (a) La fonction donnée est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a

$$D\left(\mathrm{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x},\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Dès lors, pour tout $x \in ]0, \dfrac{\pi}{2}[$, on a

$$\begin{aligned} 2Df - f^2 &= \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{2\ \sin x}{\cos^2 x} - \mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2\ \mathrm{tg} x}{\cos x} \\ &= \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{2\ \sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2\ \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1. \end{aligned}$$

(b) L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

L'équation homogène associée est $9D^2 f(x) - Df(x) = 0$ ; le polynôme caractéristique est $z \mapsto 9z^2 - z = z(9z-1)$ dont les zéros sont 0 et $\frac{1}{9}$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 + c_2 e^{x/9},\ x \in \mathbb{R}$$

où $c_1, c_2$ sont des constantes arbitraires.

On voit immédiatement qu'une solution particulière est la fonction $f_0(x) = -x,\ x \in \mathbb{R}$.

Finalement, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 + c_2 e^{x/9} - x,\ x \in \mathbb{R}$$

où $c_1, c_2$ sont des constantes arbitraires.

***Problème élémentaire***

**Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?**

*Solution.* Soit $x$ le nombre de ml de la solution contenant 10% de glucose. Le nombre de ml de la solution contenant 1% de glucose est donc $(18 - x)$. Cela étant, on a

$$\frac{10}{100} \cdot x + \frac{1}{100} \cdot (18 - x) = \frac{3}{100} \cdot 18$$

ce qui est équivalent à $9x = 36$ ou encore $x = 4$.

Ainsi, le laborantin doit prendre 4 ml de la solution contenant 10% de glucose et 14 ml de l'autre solution.

***QCM***

Question 1 Si $r$ est un réel strictement négatif, alors $|r - 1|$ vaut

**1)** $r - 1$

**2)** $-r - 1$

**3)** ♣ $1 - r$

**4)** $1 + r$

**5)** aucune des réponses précédentes n'est correcte

Question 2 Dans un repère orthonormé, l'équation cartésienne $x^2 + 2x + y^2 = 0$ est l'équation

**1)** d'une droite

**2)** ♣ d'un cercle

**3)** d'une hyperbole

**4)** d'une parabole

**5)** aucune des réponses précédentes n'est correcte

Question 3 Parmi les polynômes (en $z$) donnés explicitement ci-dessous, lequel a $\sqrt{2}+1$ comme zéro ?

**1)** $z^2 - z + 7$

**2)** $z^3 + z + 1$

**3)** ♣ $z^3 - 5z - 2$

**4)** $2z^3 - 5z^2$

**5)** aucune des réponses précédentes n'est correcte

Question 4 Un aventurier prend le départ et s'engage dans le désert muni d'une gourde remplie d'eau. Malheureusement, il trébuche dès la première heure ; la gourde s'ouvre et il perd ainsi déjà 20% du contenu. A la fin de chaque jour, l'aventurier boit un quart du contenu qui lui reste. Après deux jours de marche, la gourde

**1)** contient encore plus qu'un cinquième mais strictement moins qu'un quart de ce qu'il y avait au départ

**2)** ♣ contient encore plus qu'un quart mais strictement moins que la moitié de ce qu'il y avait au départ

**3)** contient encore plus que la moitié mais strictement moins que les trois quarts de ce qu'il y avait au départ

**4)** est vide

**5)** aucune des réponses précédentes n'est correcte

Question 5 Un second aventurier prend le départ et s'engage aussi dans le désert muni d'une gourde remplie d'eau. Malheureusement, il trébuche également, dès la première minute ; la gourde s'ouvre et il perd ainsi déjà 20% du contenu. On suppose qu'au départ la gourde contient 3 litres d'eau et qu'à la fin de la journée, l'aventurier boit le tiers de la moitié du quart de ce qu'il a en réserve. Combien de décilitres boit-il ?

**1)** ♣ 1

**2)** 2

**3)** 4

**4)** 10

**5)** aucune des réponses précédentes n'est correcte

**Mathématiques générales A, Examen du mercredi 27/05/09**
**Section géographie**

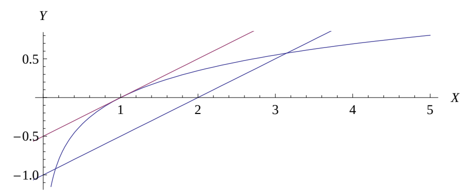
**CORRECTION (résumé)**

---

***Question de théorie***

**(a) Enoncer le théorème des accroissements finis en toute généralité.**
**(b) Ensuite l'appliquer au cas de la fonction $x \mapsto \ln(\sqrt{x})$, tracer le graphique de cette fonction dans un repère orthonormé et donner une interprétation graphique du théorème.**

*Solution.* (a)Voir cours et notes de cours.
(b) Soit la fonction réelle $x \mapsto \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$ dérivable sur $I = ]0, +\infty[$. Pour tous $x, y \in I$, il existe un point $u$ compris entre $x$ et $y$ tel que $f(x) = f(y) + (x-y)Df(u)$.
Si $x \neq y$ , on a $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = Df(u)$, égalité dont l'interprétation graphique est la suivante : il existe un point d'abscisse $u$ comprise entre $x$ et $y$ en lequel la tangente au graphique de la fonction est parallèle à la droite qui passe par les points de coordonnées cartésiennes $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.




***Exercices***

1. **(a) Résoudre l'équation (on suppose que $x \in [0, 2\pi]$)**

$$2\sin x \ \cos x = -1.$$

**(b) Simplifier au maximum l'expression suivante**

$$\ln\left(\frac{\arcsin(\frac{1}{2})}{\sqrt{e}\,\mathrm{arcotg}(\frac{\sqrt{3}}{3})}\right)$$

*Solution.* (a) Comme $2\sin x \ \cos x = \sin(2x)$, l'équation est équivalente à

$$\sin(2x) = -1.$$

Cela étant, comme $-1 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, les réels $x$ qui vérifient cette équation sont

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Comme on demande ceux qui appartiennent à $[0, 2\pi]$, il s'agit de

$$\frac{3\pi}{4} \text{ et } \frac{7\pi}{4}.$$

(b) On a $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ et $\mathrm{arcotg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Dès lors,

$$\ln\left(\frac{\arcsin(\frac{1}{2})}{\sqrt{e}\,\mathrm{arcotg}(\frac{\sqrt{3}}{3})}\right) = \ln\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \ln 2.$$

2. **Si elle existe, déterminer la limite suivante**

$$\lim_{x\to -1} \exp\left(-\frac{1}{|x+1|}\right).$$

*Solution.* Comme la fonction $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{|x+1|}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la limite de ses valeurs lorsque $x$ tend vers $-1$ peut être considérée. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to -1}\left(-\frac{1}{|x+1|}\right) = -\infty \text{ et } \lim_{y\to -\infty} \exp(y) = 0.$$

Dès lors, la limite demandée vaut 0.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_0^{\pi/3} \sin x\ \cos^2 x\ dx, \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{9+x^2}\ dx.$$

*Solution.* La fonction $x \mapsto \sin x\ \cos^2 x$ est continue sur $\mathbb{R}$ ; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[0, \frac{\pi}{3}]$. Cela étant, on a

$$\int_0^{\pi/3} \sin x\ \cos^2 x\ dx = -\int_0^{\pi/3} -\sin x\ \cos^2 x\ dx = \left[-\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{24}+\frac{1}{3} = \frac{7}{24}.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{9+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t<0$, cette fonction est donc intégrable sur $[t,0]$ et on a

$$\begin{aligned}\int_t^0 \frac{1}{9+x^2}\ dx &= \frac{1}{3}\int_t^0 \frac{1}{3}\ \frac{1}{1+(\frac{x}{3})^2}\ dx\\ &= \frac{1}{3}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_t^0 = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right)\end{aligned}$$

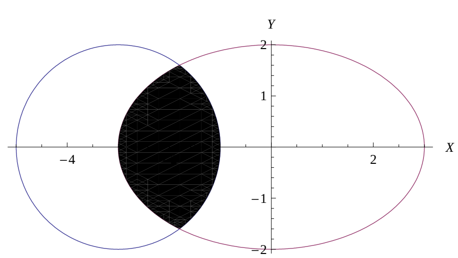
donc

$$\lim_{t\to -\infty}\int_t^0 \frac{1}{9+x^2}\ dx = -\frac{1}{3}\lim_{t\to-\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{9+x^2}$ est à valeurs positives, la limite précédente donne son intégrabilité et la valeur de son intégrale sur $]-\infty, 0[$. Ainsi,

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{9+x^2}\ dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{9+x^2}\ dx = \frac{\pi}{6}.$$

4. **(a) Décrire analytiquement l'ensemble fermé sombre suivant et déterminer les coordonnées cartésiennes des points d'intersection des deux courbes permettant de le décrire.**



**(b) On donne la fonction $f$ de manière explicite par**

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

**(i) Quel est le domaine de dérivabilité de $f$ ?**
**(ii) Déterminer l'expression explicite de ses dérivées partielles en tout point de ce domaine.**
**(iii) Si possible, déterminer la valeur des dérivées partielles au point** $(1, \sqrt{2})$

*Solution.* (a) L'ellipse représentée a pour équation cartésienne $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Le cercle centré au point de coordonnées $(-3, 0)$ et de rayon 2 a pour équation cartésienne $(x+3)^2 + y^2 = 4$.
Les coordonnées des points communs aux deux courbes sont solutions du système formé par leurs équations. Ainsi, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ (x+3)^2 + y^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^2 = 4 - (x+3)^2 \\ \dfrac{x^2}{9} + 1 - \dfrac{(x+3)^2}{4} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^2 = 4 - (x+3)^2 \\ \dfrac{x^2}{9} = \dfrac{(x+3)^2}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} = \dfrac{x+3}{2} \\ y^2 = 4 - (x+3)^2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} = -\dfrac{x+3}{2} \\ y^2 = 4 - (x+3)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -9 \\ y^2 = -32 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{9}{5} \\ y^2 = \dfrac{64}{25} \end{array}\right. .$$

Le premier système est clairement impossible et le second donne les points de coordonnées $\left(-\dfrac{9}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$ et $\left(-\dfrac{9}{5}, -\dfrac{8}{5}\right)$. Une description analytique de l'ensemble sombre est donnée par

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, (x+3)^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

et les coordonnées cartésiennes des points d'intersection sont $\left(-\dfrac{9}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$ et $\left(-\dfrac{9}{5}, -\dfrac{8}{5}\right)$.

(b)(i) Le domaine de dérivabilité de $f$ est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$.

(ii) En tout point du domaine de dérivabilité, on a

$$D_x f(x,y) = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ et } D_y f(x,y) = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

(iii) Le point de coordonnées cartésiennes $(1, \sqrt{2})$ appartient au domaine de dérivabilité de $f$ et on a

$$(D_x f)(1, \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ et } (D_y f)(1, \sqrt{2}) = \frac{-1}{3}.$$

5. **(a) Montrer que la fonction** $x \mapsto \operatorname{cotg} x + \dfrac{1}{\sin x}$, $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, **vérifie l'équation différentielle**

$$2Df + f^2 = -1.$$

**(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2 f(x) - 4Df(x) = 2$$

*Solution.* (a) La fonction donnée est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a

$$D\left(\text{cotg}x + \frac{1}{\sin x}\right) = \frac{-1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x},\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Dès lors, pour tout $x \in ]0, \dfrac{\pi}{2}[$, on a

$$\begin{aligned} 2Df + f^2 &= \frac{-2}{\sin^2 x} - \frac{2\ \cos x}{\sin^2 x} + \text{cotg}^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{2\ \text{cotg}x}{\sin x} \\ &= \frac{-2}{\sin^2 x} - \frac{2\ \cos x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{2\ \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-1}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x}{\sin^2 x} = -1. \end{aligned}$$

(b) L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

L'équation homogène associée est $D^2 f(x) - 4Df(x) = 0$ ; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 - 4z = z(z-4)$ dont les zéros sont 0 et 4. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 + c_2 e^{4x},\ x \in \mathbb{R}$$

où $c_1, c_2$ sont des constantes arbitraires.

On voit immédiatement qu'une solution particulière est la fonction $f_0(x) = -\frac{x}{2},\ x \in \mathbb{R}$.

Finalement, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 + c_2 e^{4x} - \frac{x}{2},\ x \in \mathbb{R}$$

où $c_1, c_2$ sont des constantes arbitraires.

***Problème élémentaire***

**En se transformant en glace, l'eau voit son volume augmenter de 1/15. Quelle quantité d'eau en litres faut-il pour obtenir 1,28 m$^3$ de glace ?**

*Solution.* Soit $x$ la quantité d'eau demandée exprimée en litres. Comme 1 m$^3$ est égal à $1\ 000 = 10^3$ litres, on a

$$\left(1 + \frac{1}{15}\right) x = 1\ 280$$

ou encore

$$\frac{16}{15} x = 16 \times 80.$$

Il faut donc $x = 80 \times 15 = 1\ 200$ litres d'eau pour obtenir $1,28$ m$^3$ de glace.

***QCM*** : voir ci-dessus