Mathématiques générales B Examen du lundi 17/08/09

Sections de biologie, géologie

CORRECTION (résumé)

---

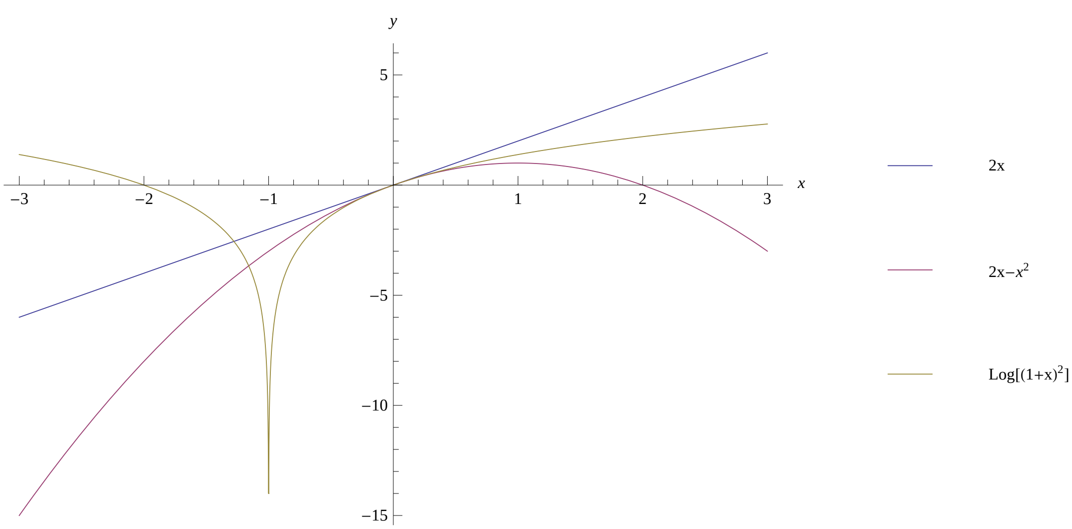
1. **On donne la fonction $x \mapsto \ln\big((x+1)^2\big)$.**
   (i) Dans quel ensemble (le plus grand possible) cette fonction est-elle indéfiniment continûment dérivable ?
   (ii) Déterminer les approximations de f à l'ordre $1, 2$ en 0.
   (iii) Dans un même repère orthonormé et en utilisant des couleurs différentes, représenter f et les approximations demandées.
   Solution.
   (i) La fonction est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et on a $\ln((x+1)^2) = 2\ln|x+1|, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
   (ii) Comme

$$Df(x) = \frac{2}{x+1} \text{ et } D^2f(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

   les approximations demandées en 0 sont

$$P_1(x) = f(0) + xDf(0) = 2x \text{ et } P_2(x) = P_1(x) + \frac{x^2}{2}D^2f(0) = 2x - x^2.$$

   (iii)



2. **Soit A la matrice**

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

   (i) Déterminer les valeurs propres de A, de même que les vecteurs propres associés.
   (ii) Cette matrice est-elle toujours diagonalisable ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.
   Solution.
   (i) Le polynôme caractéristique de A est $\det(A - \lambda I) = (i-\lambda)^2 - 1 = (i - \lambda - 1)(i - \lambda + 1)$. Donc $i+1$ et $i-1$ sont les deux valeurs propres simples de A.
   Les vecteurs propres associés à la valeur propre $i+1$ sont les solutions non nulles de

$$(A-(i+1)I)X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0,$$

c'est-à-dire les vecteurs

$$X = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $i-1$ sont les solutions non nulles de

$$(A-(i-1)I)X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = 0,$$

c'est-à-dire les vecteurs

$$X = r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{C}_0.$$

(iii) La matrice A est donc diagonalisable et on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} i+1 & 0 \\ 0 & i-1 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. **Pour quelles valeurs du réel $\alpha \in [0, 2\pi]$ la matrice suivante admet-elle une matrice inverse ? En déterminer alors l'inverse.**

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin(2\alpha) \\ \dfrac{\sin\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution.
Cette matrice admet un inverse si et seulement si son déterminant est non nul. Or, on a

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin(2\alpha) \\ \dfrac{\sin\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix} &= \cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{2}\sin(2\alpha) \\ &= \cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{2} 2\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \cos\alpha(1-\sin^2\alpha) \\ &= \cos^3\alpha. \end{aligned}$$

Cette expression s'annule donc si et seulement si $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme on ne considère que $\alpha \in [0, 2\pi]$, il s'ensuit que la matrice donnée admet un inverse si et seulement si

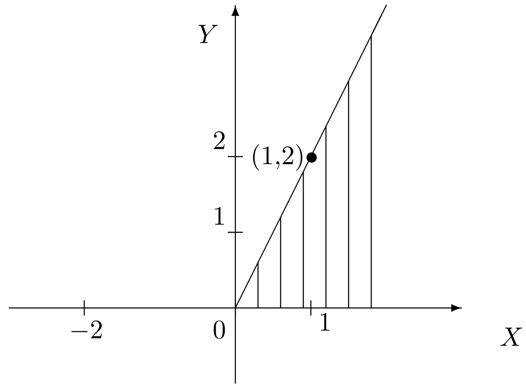
$$\alpha \in [0, 2\pi] \backslash \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

L'inverse de A est alors

$$\frac{1}{\cos^3(\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & -\sin(2\alpha) \\ -\dfrac{\sin\alpha}{2} & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

4. **Déterminer la valeur de l'intégrale suivante sur l'ensemble fermé non borné hachuré ci-dessous et simplifier la réponse au maximum**

$$\int\int_A e^{-x-y}\,dxdy$$



Solution.
La droite oblique représentée (et faisant partie du bord de l'ensemble) a pour équation cartésienne $y = 2x$. L'ensemble A s'écrit donc

$$A = \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ 0 \leq y \leq 2x \ \}.$$

La fonction f donnée par $f(x, y) = e^{-x-y}$ est positive et continue sur l'ensemble fermé non borné hachuré A. Pour montrer que la fonction est intégrable et calculer son intégrale, il suffit donc d'effectuer les intégrales successives dans un certain ordre.
Par exemple si $x \geq 0$ est fixé, alors $y \mapsto e^{-x-y}$ est intégrable sur $[0, 2x]$ borné fermé car la fonction y est continue, on a aussi

$$\int_0^{2x} e^{-x-y} \ dy = -e^{-3x} + e^{-x}.$$

Cela étant, la fonction $x \mapsto -e^{-3x} + e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car la fonction est positive et

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \left(-e^{-3x} + e^{-x}\right) \ dx = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{e^{-3x}}{3} - e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t}\right) - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x} \ dx = \frac{2}{3}.$$

Il s'ensuit que

$$\int\int_A e^{-x-y} dx dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2x} e^{-x-y} dy\right) \ dx = \frac{2}{3}.$$

5. **On donne la succession d'intégrales simples suivantes**

$$\int_0^1 \left(\int_1^{e^x} \ln y \ dy\right) dx.$$

(i) Calculer (si possible) cette succession d'intégrales.
(ii) Représenter l'ensemble A (partie du plan) sur lequel on intègre.
(iii) Permuter l'ordre d'intégration.
Solution.
(i) Si $x \in [0, 1]$, la fonction $y \mapsto \ln(y)$ est continue sur l'ensemble fermé borné $[1, e^x]$ et y est donc intégrable, on a aussi

$$\int_1^{e^x} \ln y \ dy = xe^x - e^x + 1.$$

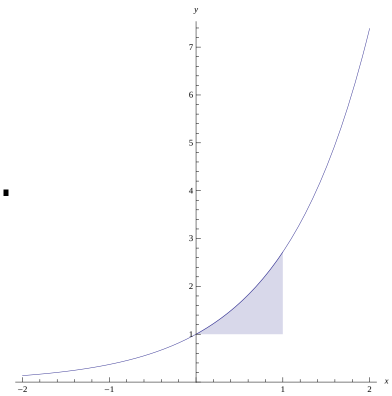
Cela étant, la fonction $x \mapsto xe^x - e^x + 1$ est continue sur le borné fermé [0,1] et y est donc intégrable et on a

$$\int_0^1 (xe^x - e^x + 1)\ dx = [-e^x + xe^x - e^x + x]_0^1 = -e + 1 + e - 0 - e + 1 + 1 - 0 = 3 - e.$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^1 \left(\int_1^{e^x} \ln y\ dy \right) dx = 3 - e.$$

(ii)



(iii) L'ensemble A s'écrit aussi $\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y \in [1,e],\ \ln(y) \leq x \leq 1\ \}$. La permutation des intégrales donne dès lors la succession suivante d'intégrales simples

$$\int_1^e \left(\int_{\ln(y)}^1 \ln y \ dx \right) dy.$$

Mathématiques générales B Examen du lundi 17/08/09

Sections de chimie, géographie, informatique, physique

CORRECTION (résumé)

---

1. **On donne la fonction $x \mapsto \ln\left((x+1)^2\right)$.**
   (i) Dans quel ensemble (le plus grand possible) cette fonction est-elle indéfiniment continûment dérivable ?
   (ii) Déterminer les approximations de f à l'ordre $1, 2$ en 0.
   (iii) Dans un même repère orthonormé et en utilisant des couleurs différentes, représenter f et les apprximations demandées.

   Solution. Voir examen des biologistes et géologues.

2. **Soit A la matrice**

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

   (i) Déterminer les valeurs propres de A, de même que les vecteurs propres associés.
   (ii) Cette matrice est-elle toujours diagonalisable ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

   Solution. Voir examen des biologistes et géologues.

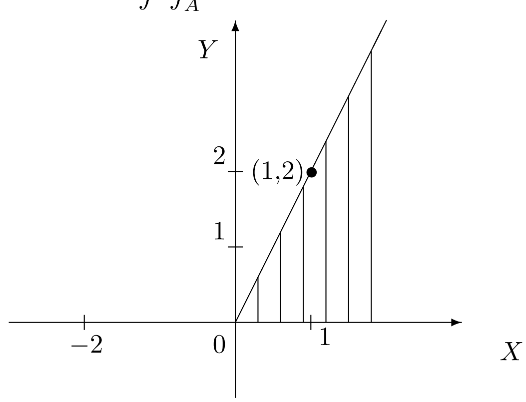
3. **Pour quelles valeurs du réel $\alpha \in [0, 2\pi]$ la matrice suivante admet-elle une matrice inverse ? En déterminer alors l'inverse.**

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin(2\alpha) \\ \dfrac{\sin\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

   Solution. Voir examen des biologistes et géologues.

4. **Déterminer la valeur de l'intégrale suivante sur l'ensemble fermé non borné hachuré ci-dessous et simplifier la réponse au maximum**

$$\int\int_A e^{-x-y}\,dxdy$$



   Solution. Voir examen des biologistes et géologues.

5. **On donne la succession d'intégrales simples suivantes**

$$\int_0^1 \left(\int_1^{e^x} \ln y \ dy\right) dx.$$

   (i) Calculer (si possible) cette succession d'intégrales.
   (ii) Représenter l'ensemble A (partie du plan) sur lequel on intègre.

(iii) Permuter l'ordre d'intégration.
(iv) La fonction $(x, y) \mapsto \ln y$ est-elle intégrable sur A ? Pourquoi ?
Si elle est intégrable, que vaut alors son intégrale ? Et que représente cette intégrale ?
Solution.
(i) à (iii) Voir examen des biologistes et géologues.
(iv) La fonction $(x, y) \mapsto \ln y$ étant positive sur l'ensemble A, elle y est intégrable vu le point (i) et son intégrale vaut $3 - e$.
Cette intégrale représente le volume sous la surface d'équation $z = \ln(y)$, $(x, y) \in A$.

6. **Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme**

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}}, \quad (ii)\ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}, \quad (iii)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{m^2+1}.$$

Solution.
(i) Il s'agit d'une série géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \in]-1, 1[$. La série est donc convergente et sa somme vaut

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} . \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} - 1} = \frac{\sqrt{\pi} + 1}{\pi - 1}.$$

(ii)Par définition de la fonction exponentielle, on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1^m}{m!} = \exp(1) = e.$$

(iii) On a

$$\frac{m}{m^2+1} = \frac{1}{m + \frac{1}{m}} \geq \frac{1}{m+1} \geq \frac{1}{2m} \geq 0$$

quel que soit le naturel $m \geq 1$.
Comme la série de terme général $\frac{1}{m}$ ne converge pas, on en déduit que la série donnée (de terme général $\frac{m}{m^2+1}$) ne converge pas non plus.