Mathématiques générales B Examen du mercredi 27/05/09

Sections de chimie, physique et informatique

CORRECTION (résumé)

---

1. **(*Physiciens et informaticiens*)**
Depuis le sol, on lance une petite fusée. On note C la quantité de carburant (en litres) au départ. Tous les 1000 km, elle consomme une part (notée q) du carburant qui lui reste. Après M milliers de kilomètres (M est un naturel strictement positif), elle aura ainsi consommé

$$S_M = qC \sum_{m=0}^{M-1} (1-q)^m$$

litres. En supposant que $q \in]0,1[$, et en sommant la série, expliquer pourquoi on peut dire que la fusée finit par consommer tout son carburant.

Solution. Si $q \in]0,1[$, alors $\sum_{m=0}^{+\infty}(1-q)^m$ est une série géométrique de raison $(1-q) \in]0,1[$. Dès lors, la série converge et sa somme vaut

$$\lim_{M\to+\infty} \sum_{m=0}^{M-1} (1-q)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} (1-q)^m = \frac{1}{1-(1-q)} = \frac{1}{q}.$$

Le carburant consommé au total est donc

$$\lim_{M\to+\infty} S_M = qC \lim_{M\to+\infty} \sum_{m=0}^{M-1} (1-q)^m = qC\frac{1}{q} = C.$$

2. (*Tous*)
Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}}, \quad (ii)\ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^m}{m!}, \quad (iii)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}.$$

Solution. (Remarque : ces séries ont été proposées au cours.)
(i) Il s'agit d'une série géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}} \in]-1,1[$. La série est donc convergente et sa somme vaut

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1.$$

(ii)Par définition de la fontion exponentielle, on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^m}{m!} = \exp(\ln(2)) = 2.$$

(iii) On a

$$\frac{m!}{m^2} = \frac{(m-1)!}{m} \geq \frac{m-1}{m} \geq \frac{1}{2}$$

quel que soit le naturel $m \geq 2$. La suite $\frac{m!}{m^2}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) ne converge donc pas vers 0. Il s'ensuit que la série donnée (de terme général $\frac{m!}{m^2}$) ne converge pas.

3. **(*Tous*)**
On donne les fonctions $f(x) = \cos(x^2),\ x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = \cos^2 x,\ x \in \mathbb{R}$. Déterminer les approximations de f et de g à l'ordre 1 (resp. $2, 3, 4$) en 0. Ces approximations sont-elles les mêmes ?
Solution. Les fonctions f et g sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Comme

$$Df(x) = -2x\sin(x^2),\ D^2f(x) = -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2),$$
$$D^3f(x) = -12x\cos(x^2) + 8x^3\sin(x^2),$$
$$D^4f(x) = -12\cos(x^2) + 48x^2\sin(x^2) + 16x^4\cos(x^2),\ x \in \mathbb{R}$$

et comme

$$Dg(x) = -\sin(2x),\ D^2g(x) = -2\cos(2x),\ D^3g(x) = 4\sin(2x),\ D^4g(x) = 8\cos(2x),\ x \in \mathbb{R},$$

les approximations demandées de f en 0 sont

$$P_1(x) = 1 = P_2(x) = P_3(x) \text{ et } P_4(x) = 1 - \frac{x^4}{2}$$

et les approximations demandées de g en 0 sont

$$P_1(x) = 1, P_2(x) = 1 - x^2 = P_3(x) \text{ et } P_4(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3}.$$

Les fonctions f et g ont donc la même approximation en 0 à l'ordre 1 mais pas aux ordres 2, 3 et 4.

4. **(*Tous*)**
Soient a et b des nombres complexes et soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

(i) Déterminer la matrice A^3.
(ii) Déterminer les valeurs propres de A, de même que les vecteurs propres associés.
(iii) Cette matrice est-elle toujours diagonalisable ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.
Solution.
(i) On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b^2-a^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & b^3-a^3 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Le polynôme caractéristique de A est $\det(A - \lambda I) = (a-\lambda)(b-\lambda)$. Les valeurs propres sont donc a et b.
<u>Cas 1 : $a = b$</u>
Dans ce cas, on a

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés sont donc les solutions non nulles de

$$(A - aI)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0,$$

c'est-à-dire tous les vecteurs non nuls.
<u>Cas 2 : $a \neq b$</u>
Dans ce cas, les vecteurs propres associés à la valeur propre a sont les solutions non nulles de

$$(A-aI)X = \begin{pmatrix} 0 & b-a \\ 0 & b-a \end{pmatrix} X = 0,$$

c'est-à-dire les vecteurs

$$X = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre b sont les solutions non nulles de

$$(A-bI)X = \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0,$$

c'est-à-dire les vecteurs

$$X = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{C}_0.$$

(iii) La matrice A est donc diagonalisable pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et
si $a = b$, A est déjà diagonale,
si $a \neq b$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. (*Tous*)
(i) Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

(ii) Pour quelles valeurs du réel $\alpha \in [0, 2\pi]$ la matrice suivante admet-elle une matrice inverse ?

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin(2\alpha) \\ \sin\alpha & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Solution. (i) Le déterminant de la matrice donnée vaut -2. Il n'est donc pas nul et la matrice inverse existe donc et vaut

$$\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

(ii) *(Remarque. Cet exercice fait partie de la « liste type 3 »et a été résolu lors d'une séance de répétition)*
Cette matrice admet un inverse si et seulement si son déterminant est non nul. Or, on a

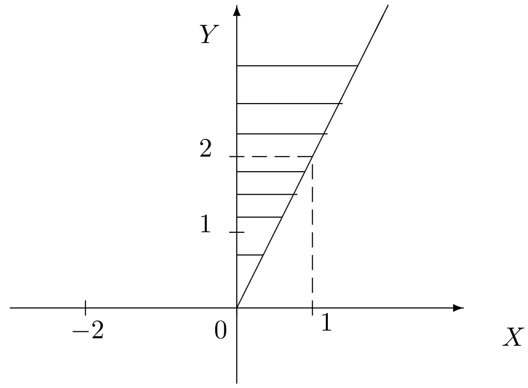
$$\det\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin(2\alpha) \\ \sin\alpha & \cos(2\alpha) \end{pmatrix} = \cos(\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(\alpha)\sin(2\alpha) = \cos(3\alpha).$$

Cette expression s'annule si et seulement si $\alpha = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme on ne considère que $\alpha \in [0, 2\pi]$, il s'ensuit que la matrice donnée admet un inverse si et seulement si

$$\alpha \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right\}.$$

6. (*Tous*)
Déterminer la valeur de l'intégrale suivante sur l'ensemble fermé non borné hachuré ci-dessous et simplifier la réponse au maximum

$$\int\int_A e^{-x-y}dxdy$$



Solution. La droite oblique représentée (et faisant partie du bord de l'ensemble) a pour équation cartésienne $y = 2x$. L'ensemble A s'écrit donc

$$A = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \leq x,\ 2x \leq y\ \}.$$

La fonction donnée par $f(x, y) = e^{-x-y}$ est positive et continue sur l'ensemble fermé non borné hachuré A. Pour montrer que la fonction est intégrable et calculer son intégrale, il suffit donc d'effectuer les intégrales successives dans un certain ordre.
Par exemple si $x \geq 0$ est fixé, alors $y \mapsto e^{-x-y}$ est intégrable sur $[2x, +\infty[$ car la fonction est positive et

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{2x}^{t} e^{-x-y}\ dy = \lim_{t\to+\infty} \left(-e^{-x-t}\right) + e^{-3x} = e^{-3x}.$$

On a donc

$$\int_{2x}^{+\infty} e^{-x-y}\ dy = e^{-3x}.$$

Cela étant, la fonction $x \mapsto e^{-3x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car la fonction est positive et

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} e^{-3x}\ dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{e^{-3t}}{-3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

On a donc

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}\ dx = \frac{1}{3}.$$

Il s'ensuit que

$$\int\int_A e^{-x-y} dxdy = \int_0^{+\infty} \left(\int_{2x}^{+\infty} e^{-x-y} dy\right)\ dx = \frac{1}{3}.$$

7. **(*Tous*)**
Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où

$$x_A = s^{-1} \int\int_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1} \int\int_A y\ dx\ dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène en forme de demi-cercle de rayon R (R réel strictement positif).
Solution. (Remarque. Cet exercice fait partie de la « liste type 2 » et a été résolu lors d'une séance de répétition.)
L'ensemble A considéré est l'intérieur d'un demi-cercle de rayon R. Considérons le cercle centré à l'origine, de rayon R et supposons que A soit constitué des points de l'intérieur du cercle dont l'ordonnée est positive. Analytiquement, l'ensemble A est décrit comme suit

$$A = \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [-R,R], \ y \in [0, \sqrt{R^2 - x^2}] \ \}.$$

Son aire s est alors $\frac{\pi R^2}{2}$.
Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues sur A, ensemble fermé borné ; elles sont donc intégrables sur A et on a

$$\begin{aligned} x_A &= s^{-1} \int\int_A x \ dx \ dy \ = \ \frac{2}{\pi R^2} \int_{-R}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x \ dy \ dx \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \int_{-R}^{R} x\sqrt{R^2 - x^2} \ dx \ = \ \frac{2}{\pi R^2} \left[\frac{-1}{3} (R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2} \right]_{-R}^{R} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_A &= s^{-1} \int\int_A y \ dx \ dy \ = \ \frac{2}{\pi R^2} \int_{-R}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y \ dy \ dx \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \int_{-R}^{R} \frac{R^2 - x^2}{2} \ dx \ = \ \frac{1}{\pi R^2} \left[\frac{-1}{3} (R^2 x - \frac{x^3}{3}) \right]_{-R}^{R} \\ &= \frac{4R}{3\pi}. \end{aligned}$$

Dès lors, le centre de masse a pour coordonnées

$$\left(0, \frac{4R}{3\pi} \right).$$

Mathématiques générales B Examen du mercredi 27/05/09

Sections de biologie et géologie

CORRECTION (résumé)

---

1. **On donne les fonctions $f(x) = \cos(x^2),\ x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = \cos^2 x,\ x \in \mathbb{R}$. Déterminer les approximations de f et de g à l'ordre 1 (resp. $2, 3, 4$) en 0. Ces approximations sont-elles les mêmes ?**

   Solution. Voir l'examen des chimistes et physiciens.

2. **Soit A la matrice**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (i) Déterminer la matrice A^3.
   (ii) Déterminer les valeurs propres de A, de même que les vecteurs propres associés.
   (iii) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.
   Solution. (i) On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

   (ii) Le polynôme caractéristique de A est $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$. Donc 1 et 3 sont les deux valeurs propres simples de A.
   Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les solutions non nulles de

$$(A - I)X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X = 0,$$

   c'est-à-dire les vecteurs

$$X = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{C}_0.$$

   Les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont les solutions non nulles de

$$(A - 3I)X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0,$$

   c'est-à-dire les vecteurs

$$X = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{C}_0.$$

   (iii) La matrice A est donc diagonalisable et on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. **(i) Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice**

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

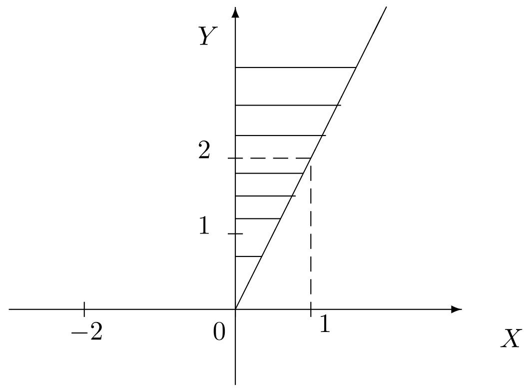
   (ii) Pour quelles valeurs du réel $\alpha \in [0, 2\pi]$ la matrice suivante admet-elle une matrice inverse ?

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin(2\alpha) \\ \sin\alpha & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Solution. Voir l'examen des chimistes et des physiciens.
(Remarque. (ii) Cet exercice fait partie de la « liste type 3 » et a été résolu lors d'une séance de répétition)

4. **Déterminer la valeur de l'intégrale suivante sur l'ensemble fermé non borné hachuré ci-dessous et simplifier la réponse au maximum**

$$\int\int_A e^{-x-y} dxdy$$



Solution. Voir l'examen des chimistes et physiciens.

5. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1} \int\int_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1} \int\int_A y\ dx\ dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène en forme de demi-cercle de rayon R (R réel strictement positif).

Solution. Voir l'examen des chimistes et des physiciens.
(Remarque. Cet exercice fait partie de la « liste type 2 » et a été résolu lors d'une séance de répétition)

Mathématiques générales B Examen du mercredi 27/05/09

Section de géographie

CORRECTION (résumé)

1. **Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme**

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\frac{m}{2}}}, \quad (ii)\ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2\ln 3)^m}{m!}, \quad (iii)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(m+1)!}{m^2}.$$

Solution.
(i) Il s'agit d'une série géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{3}} \in]-1,1[$. La série est donc convergente et sa somme vaut

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\frac{m}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

(ii)Par définition de la fonction exponentielle, on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2\ln 3)^m}{m!} = \exp(2\ln(3)) = 3^2 = 9.$$

(iii) On a

$$\frac{(m+1)!}{m^2} = (m+1)\frac{(m-1)!}{m} \geq \frac{(m-1)!}{m} \geq \frac{m-1}{m} \geq \frac{1}{2}$$

quel que soit le naturel $m \geq 2$. La suite $\frac{(m+1)!}{m^2}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ ne converge donc pas vers 0. Il s'ensuit que la série donnée (de terme général $\frac{(m+1)!}{m^2}$) ne converge pas.

2. **On donne les fonctions $f(x) = \sin(x^2),\ x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = \sin^2 x,\ x \in \mathbb{R}$. Déterminer les approximations de f et de g à l'ordre 1 (resp. $2, 3, 4$) en 0. Ces approximations sont-elles les mêmes ?**
Solution. Les fonctions f et g sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Comme

$$Df(x) = 2x\cos(x^2),\ D^2f(x) = -4x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2),$$

$$D^3f(x) = -12x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2),$$

$$D^4f(x) = -12\sin(x^2) - 48x^2\cos(x^2) + 16x^4\sin(x^2),\ x \in \mathbb{R}$$

et comme

$$Dg(x) = \sin(2x),\ D^2g(x) = 2\cos(2x),\ D^3g(x) = -4\sin(2x),\ D^4g(x) = -8\cos(2x),\ x \in \mathbb{R},$$

les approximations demandées de f en 0 sont

$$P_1(x) = 0,\ P_2(x) = x^2 = P_3(x) = P_4(x)$$

et les approximations demandées de g en 0 sont

$$P_1(x) = 0,\ P_2(x) = x^2 = P_3(x) \text{ et } P_4(x) = x^2 - \frac{x^4}{3}.$$

Les fonctions f et g ont donc la même approximation en 0 aux ordre 1, 2 et 3 mais pas à l'ordre 4.

3. **Soient a et b des nombres complexes et soit A la matrice**

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b-a & b \end{pmatrix}.$$

(i) Déterminer la matrice A^3.
(ii) Déterminer les valeurs propres de A, de même que les vecteurs propres associés.
(iii) Cette matrice est-elle toujours diagonalisable ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

Solution. (i) On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b^2-a^2 & b^2 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ b^3-a^3 & b^3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Le polynôme caractéristique de A est $\det(A-\lambda I) = (a-\lambda)(b-\lambda)$. Les valeurs propres de A sont donc a et b.

<u>Cas 1 : $a = b$</u>

Dans ce cas, on a

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés sont donc les solutions non nulles de

$$(A-aI)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0,$$

c'est-à-dire tous les vecteurs non nuls.

<u>Cas 2 : $a \neq b$</u>

Dans ce cas, les vecteurs propres associés à la valeur propre a sont les solutions non nulles de

$$(A-aI)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b-a & b-a \end{pmatrix} X = 0,$$

c'est-à-dire les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre b sont les solutions non nulles de

$$(A-bI)X = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ b-a & 0 \end{pmatrix} X = 0,$$

c'est-à-dire les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{C}_0.$$

(iii) La matrice A est donc diagonalisable pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et
si $a = b$, A est déjà diagonale,
si $a \neq b$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. **(i) Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice**

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

(ii) Pour quelles valeurs du réel $\alpha \in [0, 2\pi]$ la matrice suivante admet-elle une matrice inverse ?

$$\begin{pmatrix} -\cos\alpha & \sin(3\alpha) \\ \sin\alpha & \cos(3\alpha) \end{pmatrix}.$$

Solution. (i) Le déterminant de la matrice vaut 2. Il n'est donc pas nul et la matrice inverse existe donc et vaut

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

(ii) Cette matrice admet un inverse si et seulement si son déterminant est non nul. On a

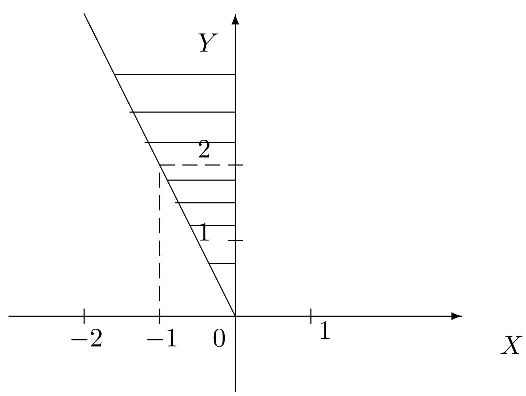
$$\det\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin(2\alpha) \\ \sin\alpha & \cos(2\alpha) \end{pmatrix} = -\cos(\alpha)\cos(3\alpha) - \sin(\alpha)\sin(3\alpha) = -\cos(2\alpha).$$

Cette expression s'annule si et seulement si $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. Comme on ne considère que $\alpha \in [0, 2\pi]$, la matrice donnée admet donc un inverse si et seulement si

$$\alpha \in [0, 2\pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}.$$

5. **Déterminer la valeur de l'intégrale suivante sur l'ensemble fermé non borné hachuré ci-dessous et simplifier la réponse au maximum**

$$\int\int_A e^{x-y}\,dxdy$$



Solution.
La droite oblique représentée (et faisant partie du bord de l'ensemble) a pour équation cartésienne $y = -2x$. L'ensemble A s'écrit donc

$$A = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \geq x,\ -2x \leq y\ \}.$$

La fonction donnée par $f(x, y) = e^{x-y}$ est positive et continue sur l'ensemble fermé non borné hachuré A. Pour montrer que la fonction est intégrable et calculer son intégrale, il suffit donc d'effectuer les intégrales successives dans un certain ordre.
Par exemple si $x \leq 0$ est fixé, alors $y \mapsto e^{x-y}$ est intégrable sur $[-2x, +\infty[$ car la fonction est positive et

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-2x}^{t} e^{x-y}\ dy = \lim_{t\to+\infty} \left(-e^{x-t}\right) + e^{3x} = e^{3x}.$$

On a donc

$$\int_{-2x}^{+\infty} e^{x-y}\ dy = e^{3x}.$$

Cela étant, la fonction $x \mapsto e^{3x}$ est intégrable sur $]-\infty, 0]$ car la fonction est positive et

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^0 e^{3x}\ dx = \frac{1}{3} - \lim_{t\to-\infty} \left(\frac{e^{3t}}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

On a donc

$$\int_{-\infty}^0 e^{3x}\ dx = \frac{1}{3}.$$

Il s'ensuit que

$$\int\int_A e^{x-y} dxdy = \int_{-\infty}^0 \left(\int_{-2x}^{+\infty} e^{x-y} dy\right) dx = \frac{1}{3}.$$

6. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1} \int\int_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1} \int\int_A y\ dx\ dy$$

et où s est l'aire de la surface A.

Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène en forme de quart de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

Solution. L'ensemble A considéré est l'intérieur d'un quart de cercle de rayon R. Considérons le cercle centré à l'origine, de rayon R et supposons que A soit constitué des points de l'intérieur du cercle dont l'ordonnée et l'abscisse sont positives. Analytiquement, l'ensemble A est décrit comme suit

$$A = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \in [0, R],\ y \in [0, \sqrt{R^2 - x^2}]\ \}.$$

Son aire s est alors $\frac{\pi R^2}{4}$.

Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur A, ensemble fermé borné ; elles sont donc intégrables sur A et on a

$$\begin{aligned} x_A &= s^{-1} \int\int_A x\ dx\ dy = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x\ dy\ dx \\ &= \frac{4}{\pi R^2} \int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\ dx = \frac{-2}{\pi R^2} \left[\frac{2}{3}(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}\right]_0^R \\ &= \frac{4R}{3\pi} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_A &= s^{-1} \int\int_A y\ dx\ dy = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\ dy\ dx \\ &= \frac{4}{\pi R^2} \int_0^R \frac{R^2 - x^2}{2}\ dx = \frac{2}{\pi R^2} \left[(R^2 x - \frac{x^3}{3})\right]_0^R \\ &= \frac{4R}{3\pi}. \end{aligned}$$

Dès lors, le centre de masse a pour coordonnées

$$\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right).$$