Mathématiques générales B, Interrogation du 04/05/09

CORRECTION

THEORIE

Soit f une fonction 5 fois dérivable dans l'intervalle $]-1,2[$.
a) Enoncer le résultat appelé "développement limité de Taylor" à l'ordre 5 au point 1.
b) Relier ce résultat à la notion d'approximation polynomiale de f à l'ordre 4 au point 1, ainsi qu'à la notion de reste de cette approximation.

Solution. Voir notes de cours, à adapter dans ce cas particulier d'intervalle, de point où l'on considère l'approximation et d'ordre d'approximation.

EXERCICES

Question 1

a) On donne la fonction f explicitement par $f(x) = \ln(1+x^2)$.
- Où cette fonction est-elle indéfiniment dérivable?
- En déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 2 en 0

b) On considère la fonction cosinus.
- Où cette fonction est-elle indéfiniment dérivable?
- En déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0
- Dans un même repère orthonormé, représenter la fonction cosinus et l'approximation demandée (en utilisant des couleurs différentes).
- *****Toutes les sections sauf biologistes et géologues*****
Donner une estimation du reste de l'approximation.

Solution. a) Comme la fonction ln est indéfiniment dérivable dans $]0,+\infty[$ et comme tout polynôme est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$, la fonction donnée est indéfiniment dérivable dans

$$\left\{x \in \mathbb{R} \ : \ 1+x^2 > 0\right\} = \mathbb{R}.$$

Cela étant, son approximation polynomiale à l'ordre 2 en 0 est le polynôme

$$P(x) = f(0) + xDf(0) + \frac{x^2}{2}D^2f(0), \ x \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$Df(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad D^2f(x) = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \ x \in \mathbb{R}$$

on en déduit que l'approximation est

$$P(x) = 0 + 0 + x^2 = x^2, \ x \in \mathbb{R}.$$

b) La fonction cosinus est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$. Cela étant, son approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est le polynôme

$$P(x) = \cos(0) + xD\cos(0) + \frac{x^2}{2}D^2\cos(0) + \frac{x^3}{3!}D^3\cos(0), \ x \in \mathbb{R}.$$

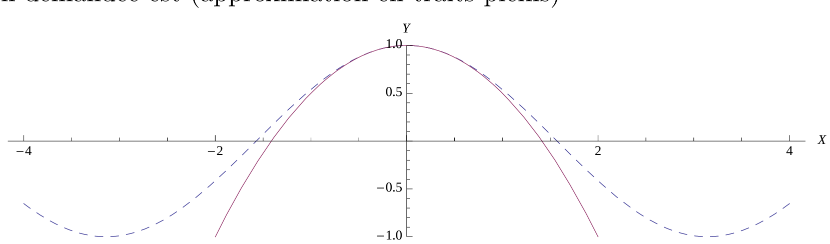
Comme

$$D\cos x = -\sin x, \ D^2\cos x = -\cos x, \ D^3\cos x = \sin x, \ x \in \mathbb{R}$$

on en déduit que

$$P(x) = 1 + 0 - \frac{x^2}{2} + 0 = 1 - \frac{x^2}{2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

La représentation demandée est (approximation en traits pleins)



Comme la fonction cosinus est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$, le développement limité de Taylor affirme que pour tout réel x, il existe un réel u compris entre 0 et x tel que

$$\cos x = P(x) + \frac{x^4}{4!} D^4 \cos(u).$$

Il s'ensuit que le reste $R(x) = \cos x - P(x)$ est tel que

$$|R(x)| = \frac{x^4}{4!} \left| D^4 \cos u \right| = \frac{x^4}{24} |\cos u| \leq \frac{x^4}{24}.$$

Question 2 pour les biologistes

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que cette matrice admet 1 **comme valeur propre.**
b) Déterminer le vecteur propre de valeur propre 1 **dont les éléments sont positifs et de somme égale à** 1.
c) Montrer que si la somme des éléments du vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ **est égale à** 1, **alors il en va de même pour le vecteur** AX.

Solution. a) Les valeurs propres de A sont les zéros du polynôme $det(A - xI)$, $x \in \mathbb{C}$ (I représente ici la matrice identité à deux dimensions). Comme on a

$$det\,(A - 1I) = det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} - 1 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = 0$$

on conclut que 1 est bien valeur propre de A.

b) Les vecteurs propres de valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant

$$(A - I)X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} + \frac{y}{4} \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire les vecteurs

$$X = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{C}_0.$$

Cherchons r tel que $r + 2r = 1$ (nécessairement les deux éléments du vecteur seront positifs). On trouve immédiatement $r = \frac{1}{3}$ et il s'ensuit que le vecteur demandé est $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

c) On suppose que $a + b = 1$. On a

$$AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{b}{4} \\ \frac{a}{2} + \frac{3b}{4} \end{pmatrix}$$

donc

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{a}{2} + \frac{3b}{4} = a + b = 1.$$

Question 2 pour toutes les sections sauf les biologistes

Déterminer si les séries suivantes convergent. Si c'est le cas, en déterminer la somme.

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\cos(\frac{\pi}{3})\right)^m}, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\cos(\frac{\pi}{3})\right)^m$$

Solution. Ces séries sont des séries géométriques. On a $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que la première série, série géométrique de raison 2, ne converge pas et que la seconde, de raison $1/2$, converge. On a en outre

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\cos(\frac{\pi}{3})\right)^m = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2} \, \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$