Liste « type » 1
Répétition Math 1 du second quadrimestre

REMARQUES
- ne pas oublier d'utiliser le JdeB (données)
- succession des matières : voir nouvelles notes de cours
- les étoiles : uniquement avec physiciens et informaticiens

Matière :
- rappels sur l'intégration à une variable, sur les fonctions à plusieurs variables
- début de l'intégration des fonctions de plusieurs variables

Exercices de rappels

1. Déterminer l'aire de la surface du plan dont une représentation analytique est donnée ci-dessous. En la hachurant, représenter cette surface dans le plan muni d'un repère orthonormé.

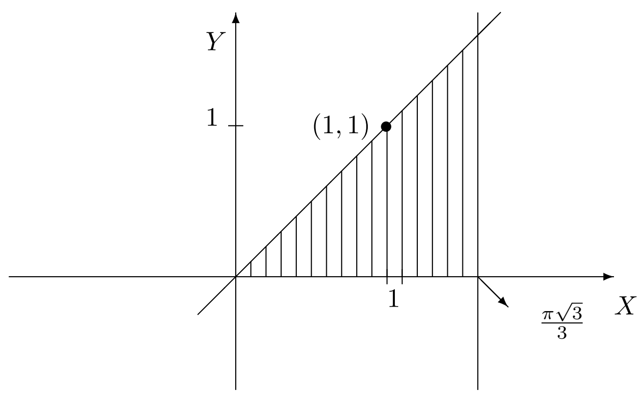
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0,\pi],\ \sin x \leq y \leq |\cos x|\}$$

2. Pour toutes les valeurs du réel strictement positif r, déterminer la valeur de l'intégrale suivante

$$I(r) = \int_0^r \ln x \ dx.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de r cette intégrale est-elle nulle ? Interpréter graphiquement la réponse.

3. Déterminer une représentation analytique de l'ensemble borné et fermé suivant (hachuré)



Exercices de rappels à proposer en TD ou devoir

1. Dans la nature, l'accroissement d'une population est modulée par la disponibilité des ressources alimentaires, par la prédation, par les facteurs du milieu. Tous ces éléments peuvent avoir un effet défavorable sur la croissance de la population et faire varier les taux de natalité et de mortalité. C'est ce que l'on appelle « facteurs limitants ».
Un modèle largement utilisé en écologie est le suivant[1]. Si $N(t)$ désigne la population au temps $t \geq 0$, si N_0 est la population initiale, l'analyse conduit à l'obtention d'une expression de type suivant [2] pour N

$$N(t) = \frac{K}{1 + c_0 e^{-3t/4}},\ t \geq 0$$

où K est une constante relative au milieu[3] et où $c_0 = \frac{K}{N_0} - 1$.

---
[1] Verhulst, 1838
[2] dans le cas où le taux d'accroissement intrinsèque r est égal à 0.75
[3] appelée « capacité biotique du milieu »

Pour $K = c_0 = 1$ et pour toutes les valeurs du réel strictement positif r, déterminer l'intégrale

$$I(r) = \int_0^r N(t)\ dt$$

et en donner une interprétation graphique.

2. *En calcul intégral, le **théorème de la moyenne** exprime que l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle fermé borné est l'aire d'un rectangle dont un des côtés est le segment formé par l'intervalle et dont les côtés perpendiculaires à ce dernier sont des segments de longueur égale à la valeur de f en un point de l'intervalle.*

   - Exprimer mathématiquement ce résultat.

   - Esquisser une représentation graphique de ce résultat.

   - (*) A l'aide des suggestions ci-dessous, démontrer ce résultat.
     Suggestions.
     - Utiliser le théorème des bornes atteintes.
     - En déduire que l'intégrale de f sur l'intervalle est plus grande (resp. plus petite) ou égale au produit de la longueur de l'intervalle par la valeur de f en un point de cet intervalle.
     - Conclure soit directement, soit en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

   - (*) A l'aide de ce résultat et en suivant les suggestions ci-dessous, démontrer que
     Si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est une primitive de f sur $]a, b[$.
     Suggestions.
     - Reformulation de la thèse : on doit démontrer que $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est dérivable sur $]a, b[$ et que sa dérivée est f en tout réel de cet intervalle.
     - Fixer un réel de l'intervalle et utiliser l'expression qui conduit à l'existence et la valeur de la dérivée en ce point.
     - Utiliser le théorème de la moyenne pour donner une autre expression au numérateur intervenant dans l'item précédent.
     - Conclure en utilisant la continuité de f.