Liste « type » 3
Répétitions Math 4, 5 , (6 ?) du second quadrimestre

REMARQUES
- Nombreux autres exercices au cours (faits ou suggérés)
- Ne pas oublier d'utiliser le JdeB (données)
- Succession des matières : voir nouvelles notes de cours
- Les étoiles doubles : uniquement avec physiciens et informaticiens
- Les étoiles simples : tous sauf biologistes et géologues

Matière :
- calcul matriciel

Exercices

1. Soient les matrices A, B, C données par
$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (1+i)^2 & \frac{1}{i} & (1-i)^3 \\ 1 & i & 1-i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{i}{1+i} & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}.$$
Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.
$$iC,\ (iB)^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ B^*B,\ \widetilde{A}B,\ AB,\ C^2.$$

2. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$.

3. (**) Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} (i+1)^2 & 1 \\ -2i & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en x. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.
$$\begin{pmatrix} 2-x & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2-x & i \\ i & -x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \quad (*)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Liste d'exercices où puiser pour proposer en TD ou devoir

1. Le déterminant des matrices suivantes est un polynôme en x. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.
$$\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ x^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la matrice suivante n'admet pas d'inverse ?
$$\begin{pmatrix} a & 2a \\ a+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (**) Factoriser le déterminant de la matrice suivante en un produit de polynômes du premier degré en x, y, z.
$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice
$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

5. Pour quelles valeurs du réel $\alpha \in [0, 2\pi]$ la matrice suivante admet-elle une matrice inverse ? Déterminer alors cet inverse.
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin(2\alpha) \\ \sin\alpha & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

6. (*) Si a est un réel donné, montrer que la matrice suivante admet toujours un inverse et déterminer celui-ci.
$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. (**) Démontrer que si A est une matrice carrée qui vérifie $A^2 - A + I = 0$ alors A est inversible et déterminer son inverse en fonction de A.

8. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}.$$

9. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type
$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).
    - Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.
    - Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et M'_θ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?

– Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

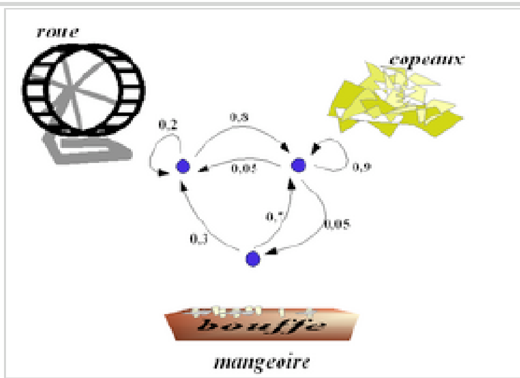
est aussi une matrice qui représente une rotation.

11. *Doudou le hamster.*

Doudou le hamster paresseux ne connaît que 3 endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation processus sans mémoire n'est pas du tout exagérée pour parler de Doudou !

- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
- Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
- Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
- Courir est fatigant ; il a donc 80 % de chance de retourner dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué

– Représenter la matrice de transition de ce système
– Prenons l'hypothèse que Doudou dort lors de la première minute de l'étude. Après une minute, quel pourcentage de chance a-t-on que Doudou dorme encore ? (resp. que Doudou mange ? , que Doudou coure ?)
– (**) Avec ce modèle, à long terme, combien de temps pourra-t-on dire que Doudou a passé à dormir ?



exemple avec boucles dessinées

12. – Le produit d'une matrice et de sa transposée est toujours possible Vrai☐ Faux☐
– Si A est une matrice et si $\widetilde{A}$ désigne sa transposée, on sait que les produits $A\widetilde{A}$ et $\widetilde{A}A$ existent tous les deux. On peut donc en déduire que ceux-ci sont égaux Vrai☐ Faux☐
– Dans le cadre de la multiplication entre une matrice et sa transposée, la propriété de commutativité est correcte Vrai☐ Faux☐
– Exprimer mathématiquement l'associativité du produit matriciel.
– Une matrice carrée est qualifiée de matrice symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée. Si une matrice symétrique admet un inverse, cet inverse est-il encore une matrice symétrique ? Expliquer votre réponse.
– On suppose que la matrice carrée A est telle que $A\widetilde{A} = I$. Cette propriété est-elle suffisante pour que A soit une matrice inversible ? Pourquoi ?
Si votre réponse est oui, quelle est alors l'expression de l'inverse de A dans ce cas particulier ?
– On suppose que la matrice carrée A est telle que $A\widetilde{A} = I$. Cette propriété est-elle nécessaire à l'inversibilité de A ? Pourquoi ?

– Si une matrice est réelle, alors ses valeurs propres sont réelles aussi. Vrai☐ Faux☐
– Il n'est pas possible qu'une matrice dont au moins un élément est complexe possède uniquement des valeurs propres réelles. Vrai☐ Faux☐
– Deux matrices qui ont les mêmes valeurs propres sont en fait nécessairement les mêmes matrices. Vrai☐ Faux☐

13. (**) Dans cet exercice, on ne travaille qu'avec des matrices carrées.
Une matrice carrée est qualifiée de matrice hermitienne lorsqu'elle est égale à son adjointe.
Une matrice carrée est qualifiée de matrice symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée.
Une matrice carrée réelle est qualifiée de matrice orthogonale lorsque le produit de cette matrice et de sa transposée est la matrice identité.
(a) Est-il correct de dire que pour qu'une matrice réelle soit hermitienne, il suffit qu'elle soit symétrique ? Justifier votre réponse.
(b) Est-il correct de dire que pour qu'une matrice réelle soit hermitienne, il est nécessaire qu'elle soit symétrique ? Justifier votre réponse.
(c) Déterminer la forme générale des matrices hermitiennes 2×2.
(d) On donne les matrices
$$A = \begin{pmatrix} x & i & -1 \\ y & 0 & i+1 \\ z & t & s \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -1/2 \\ y & x \end{pmatrix}$$
• Donner des exemples (si possible) de valeurs de complexes x, y, z, t, s pour lesquels la matrice A est symétrique (resp. hermitienne).
• Déterminer l'ensemble des réels x, y pour lesquels la matrice B est orthogonale.
(e) Existe-t-il des matrices symétriques qui ne sont pas hermitiennes ? Si votre réponse est non, justifier. Si votre réponse est oui, donner un exemple.
(f) Existe-t-il des matrices hermitiennes qui ne sont pas symétriques ? Si votre réponse est non, justifier. Si votre réponse est oui, donner un exemple.
(g) Est-il correct de dire que le produit de deux matrices orthogonales est encore une matrice du même type ? Pourquoi ?
(h) Quelle est la forme générale d'une matrice réelle symétrique 2×2 ? Quelle est la forme explicite du polynôme caractéristique de cette matrice ? Une telle matrice possède toujours deux valeurs propres réelles ; comment le prouver facilement vu ce qui précède ?

14. (**) Répondre aux questions suivantes et justifier la réponse.
– Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = A$, alors A est la matrice nulle ou est la matrice identité Vrai☐ Faux☐
– Si M est une matrice carrée qui vérifie $M\widetilde{M} = I$, alors M vérifie aussi $\widetilde{M}M = I$ Vrai☐ Faux☐
– Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $A^2 - B^2 = (A - B)\,(A + B)$ Vrai☐ Faux☐
– Les valeurs propres d'une matrice carrée réelle orthogonale sont toujours des nombres réelsVrai☐ Faux☐
– Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai☐ Faux☐
– La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai☐ Faux☐
– La somme de deux vecteurs propres de valeur propre nulle est encore un vecteur propre de valeur propre nulle Vrai☐ Faux☐
– La trace du produit de deux matrices carrées de même dimension reste la même si on permute l'ordre des facteurs du produit.

FB, 15 février 2009