

Liste « type » 4  
Approximations polynomiales,

**REMARQUES**

- Plusieurs autres exercices au cours (faits ou suggérés)
- Ne pas oublier d'utiliser le JdeB (données)
- Succession des matières : voir nouvelles notes de cours
- Les étoiles doubles : uniquement avec physiciens et informaticiens
- Les étoiles simples : tous sauf biologistes et géologues
- Ceci est la dernière liste "pour tous" (puisque les biologistes ont leur dernier cours (sur les approximations) ce lundi 9 mars 2009.

**Exercices**

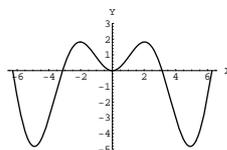
1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre  $n$  en  $x_0$  pour la fonction  $f_k$ . Représenter  $f_2$  (ou  $f_3$  ou  $f_5$ ) et ses approximations.

$$\begin{array}{ll}
 f_1(x) = \cos x e^x, & x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3 \\
 f_2(x) = \sqrt{1-x}, & x_0 = 0, n = 0, 1, 2 \\
 f_3(x) = \frac{1}{1+x}, & x_0 = 0, n = 0, 1, 2 \\
 f_4(x) = \operatorname{arctg} x, & x_0 = 0, n = 0, 1, 2 \\
 f_5(x) = \cos^2 x, & x_0 = 0, n = 0, 1, 2 \\
 f_6(x) = \cos x, & x_0 = 1, n = 0, 1, 2
 \end{array}$$

2. a) (\*) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction  $\cos$  et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.

- b) (\*\*) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre 1 et à l'ordre 2 de la fonction  $f(x) = x \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où  $f$  est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.

(Suggestion :  $|\sin x| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$ .)



3. (\*\*) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 0, 1, 2, 3 en 0 des fonctions données par<sup>1</sup>

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right), \quad g_2(x) = \frac{-3x+2}{2x^2-3x+1}.$$

<sup>1</sup>Suggestion. Utiliser le développement de  $\ln(1+x)$  et  $\ln(1-x)$ ; décomposer en fractions simples

**Liste d'exercices où puiser pour proposer en TD ou devoir**

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre  $n$  en  $x_0$  pour la fonction  $f_k$ . Représenter  $f_1$  et ses approximations.

$$f_1(x) = x \cos(2x), \quad x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3; \quad f_2(x) = \ln(x^2 + 1), \quad x_0 = 0, n = 0, 1, 2$$

$$f_3(x) = (1 + x^2)^2, \quad x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3, 4$$

2. (\*\*) Un tunnel d'une longueur  $l$  relie deux points de la surface de la Terre. Si  $R$  désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale de ce tunnel.

3. QCM

- (a) L'approximation à l'ordre 3 d'une fonction en un point est toujours
- un polynôme de degré 3
  - une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur
  - un nombre réel plus petit ou égal à 3
  - une fonction
  - aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (b) Si  $f$  est une fonction paire qui est indéfiniment continûment dérivable sur  $] - 1, 1[$  alors
- a) l'approximation de  $f$  en 0 à l'ordre 1 est  $f(0)$  Vrai  Faux
  - b) l'approximation à l'ordre 5 et à l'ordre 6 sont les mêmes Vrai  Faux
  - c) l'approximation à l'ordre 6 et à l'ordre 7 sont les mêmes Vrai  Faux
  - d) l'approximation à l'ordre 0 en 0 est nulle Vrai  Faux
- (c) Si  $f$  est une fonction impaire qui est indéfiniment continûment dérivable sur  $] - 1, 1[$  alors
- a) l'approximation de  $f$  en 0 à l'ordre 1 est  $f(0)$  Vrai  Faux
  - b) l'approximation à l'ordre 5 et à l'ordre 6 sont les mêmes Vrai  Faux
  - c) l'approximation à l'ordre 6 et à l'ordre 7 sont les mêmes Vrai  Faux
  - d) l'approximation à l'ordre 0 en 0 est nulle Vrai  Faux

FB, 7 mars 2009