Liste « type » 5
Approximations polynomiales, suites et séries

REMARQUES
- Les biologistes ne sont plus concernés
- Plusieurs autres exercices au cours (faits ou suggérés)
- Ne pas oublier d'utiliser le JdeB (données)
- Succession des matières : voir nouvelles notes de cours
- Les étoiles doubles : uniquement avec physiciens et informaticiens
- Les étoiles simples : tous sauf géologues

Exercices

1. Etudier la convergence de la suite q^m ($m \in \mathbb{N}_0$) en fonction de la valeur du paramètre réel q.
La suite suivante converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?
$$x_m = \sum_{\zeta=2}^{m} \frac{1}{\zeta^2 - 1}, \quad m \in \mathbb{N}, m \geq 2.$$

2. (*) Etudier la convergence des séries suivantes (signaler le critère des séries alternées)
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(2m)}{m^2}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{3m+1}}{m} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m}}{\sqrt{2m+1}}, \quad \sum_{m=4}^{+\infty} (\sin\sqrt{2})^m.$$

3. (*) Etudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes, lorsqu'elles sont convergentes.
$$\sum_{m=2}^{+\infty} (-3)\left(\frac{2}{3}\right)^m, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{-m} \frac{3^m}{2^{m+2}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

4. (**) Illustrer par un exemple le fait que *si la série* $\sum_{m=1}^{+\infty} x_m$ *converge et si la série* $\sum_{m=1}^{+\infty} |x_m|$ *ne converge pas, alors on ne peut pas impunément grouper les termes de la première sans changer la limite.*
Exemple avec la série harmonique alternée : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots \to \ln 2$ et
$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots \\ = \quad & \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right) \\ \to \quad & \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Liste d'exercices où puiser pour proposer en TD ou devoir

1. Déterminer si les suites x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) suivantes sont convergentes. Si c'est le cas, en déterminer la limite

$$x_m = (-1)^m; \qquad x_m = \left(\sin(\frac{\pi}{3})\ \ln(e^{-2})\right)^m; \qquad x_m = \pi^{m\pi}$$

2. Etudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes, lorsqu'elles sont convergentes.

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{\pi^m}, \quad \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{1}{m^2 - 3m + 2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln(e^2)}\right)^m.$$

3. QCM
   (a) Au sens mathématique des termes employés, une suite de nombres est-elle toujours une série ?
   Oui☐ Non☐
   (b) Soit une suite de nombres x_m ($m \in \mathbb{N}_0$). La série de terme général x_m est la suite des sommes partielles $\sum_{m=1}^{M} x_m$ ($M \in \mathbb{N}_0$).
   Pour $x_m = \left(-\frac{1}{2}\right)^m$, que vaut le quatrième élément de cette nouvelle suite ? (c'est-à-dire que vaut la quatrième somme partielle ?)
   (c) On donne une suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) pour laquelle il existe $r > 0$ tel que $x_{m+1} - x_m = r$ quel que soit m. Quelle est la série de terme général x_m ? Est-elle convergente ? Pourquoi ?
   (d) On donne une suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de nombres réels non nuls pour laquelle il existe $r > 0$ tel que $\frac{x_{m+1}}{x_m} = r$ quel que soit m. Quelle est la série de terme général x_m ? Est-elle convergente ? Pourquoi ?
   (e) Pour qu'une suite converge, il est suffisant que tous ses éléments soient en module strictement plus petits que 1 Vrai☐ Faux☐
   (f) Si la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est telle que $|x_m| < 1$ pour tout m, alors la suite converge vers 0.
   Vrai☐ Faux☐
   (g) Soit une suite de réels x_m ($m \in \mathbb{N}_0$). Si la série de terme général x_m converge, alors la suite x_m converge vers 0. Vrai☐ Faux☐
   (h) Soit une suite de réels x_m ($m \in \mathbb{N}_0$). Si cette suite converge, alors elle converge vers 0.
   Vrai☐ Faux☐
   (i) La convergence vers 0 du terme général d'une série est une condition suffisante pour la convergence de la série Vrai☐ Faux☐
   (j) La convergence vers 0 du terme général d'une série est une condition nécessaire pour la convergence de la série. Vrai☐ Faux☐
   (k) Soit la série $\sum_{m=1}^{+\infty} x_m$. Si elle converge, alors x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite qui converge vers 0.
   Vrai☐ Faux☐
   (l) Soit la série $\sum_{m=1}^{+\infty} x_m$. Si la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite qui converge vers 0 alors la série converge. Vrai☐ Faux☐
   (m) La fonction $f(x) = e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$ est une fonction monotone Vrai☐ Faux☐
   (n) La fonction $f(x) = e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$ tend vers 0 en $-\infty$ Vrai☐ Faux☐

FB, 11 mars 2009