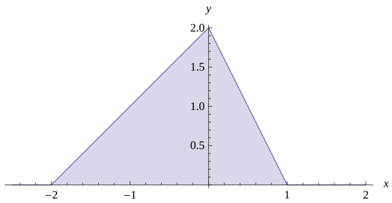
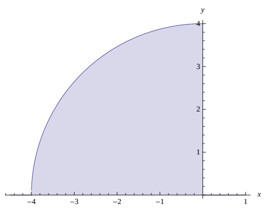
Liste d'exercices types pour révisions

Exercices sur les intégrales de fonctions de plusieurs variables

1. Calculer l'intégrale de la fonction
a) $f : (x, y) \mapsto 4 - y$ sur l'ensemble borné fermé coloré ci-dessous.



b) $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ sur l'ensemble borné fermé coloré ci-dessous.



2. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a) \quad \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\frac{x+1}{2}} f(x, y) dy \right) dx, \qquad b) \quad \int_{-1}^{0} \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx \right) dy$$

3. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

$$a) \quad \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{3} x\sqrt{x^2 + y} dx \right) dy, \qquad b) \quad \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{x} e^{x^2} dy \right) dx$$

$$c) \quad \int_{-\infty}^{1} \left(\int_{0}^{+\infty} e^{y-3x} dx \right) dy, \qquad d) \quad \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{0}^{x^2} \frac{e^{2x}}{x^2 + y} dy \right) dx$$

Exercices sur les matrices

1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2i & 2i^4 & \frac{(1+i)^2)}{i^3} \\ 0 & -1 & 1 - i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i + 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3i + 1 & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}$$

Calculer (si possible) iA, AA^*, BA, CB.

2. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} i+1 & 1 \\ -2i & 5 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Rechercher les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercices sur les approximations polynomiales

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation à l'ordre n en x_0 de la fonction f_k. Représenter f_3, f_4 et leurs approximations.

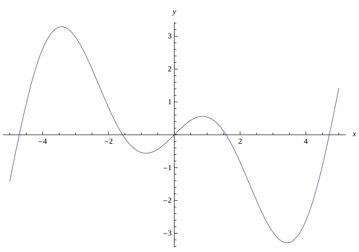
$f_1(x) = x\cos^2(x),\ n = 0, 1, 2, 3, 4,\ x_0 = 0$

$f_2(x) = x^2 \sin(x),\ n = 0, 1, 2, 3\ x_0 = 0$

$f_3(x) = \sqrt{1 + x^2},\ n = 0, 1, 2\ x_0 = 0$

$f_4(x) = |\cos(x)|\,,\ n = 0, 1, 2,\ x_0 = \pi$

2. a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction sin et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le mÎme repère. b) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre 1 et à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = x\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le mÎme repère orthonormé que celui où f est représenté (cfr ci-dessous) en justifiant les positions relatives des courbes.



Exercices sur les suites et séries

1. a) Soit $q \in]-1, 1[$, la suite suivante converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

$$x_m = \sum_{j=0}^{m} q^j, \qquad m \in \mathbb{N}_0$$

b) MÍme question avec

$$x_m = \frac{m+1}{m^2+1},\ m \in \mathbb{N}_0, \qquad x_m = (\frac{\cos(\pi/6)}{ln(e^{-3})})^m,\ m \in \mathbb{N}_0$$

2. Étudier la convergence des séries suivantes

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{2m+1}},\quad \sum_{m=4}^{+\infty} \frac{1}{(\sin(2))^m},\quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{4m+1}}{m},\quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m m}{m^2+1}.$$

3. Étudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes, lorsqu'elles sont convergentes.

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)},\quad \sum_{m=2}^{+\infty} (-3)^{-m},\quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{(m+1)(m+2)(m+3)},\quad \sum_{m=1}^{+\infty} (\frac{1}{m^3} - \frac{1}{(m+1)^3}).$$