Liste « supplémentaire (B) »
Suites et séries

REMARQUES
- Cette liste peut constituer une base pour un TD ou/et faire partie d'une séance de révision

---

1. *Achille et la tortue.*
   Zénon était un philosophe qui vivait dans la ville d'Elée en Italie (environ 490-430 av JC). Même s'il n'était pas mathématicien, il tient une place dans l'histoire des mathématiques car il a sans doute été l'un des premiers à poser le problème de l'infini mathématique, notamment dans le « célèbre paradoxe d'Achille et la tortue » (dans le cadre de ses raisonnements sur l'impossibilité du mouvement).

   Essentiellement, le paradoxe d'Achille et la tortue s'énonce comme suit : *Achille poursuit une tortue qui le devance de 100m, et tous les deux se déplacent en ligne droite. Toutefois, pour rejoindre la tortue, Achille doit d'abord franchir les 100m qui le séparaient initialement de la tortue. Pendant ce temps, la tortue, qui se déplace deux fois moins rapidement, a parcouru une distance de 50m, de sorte qu'Achille n'a pas encore rejoint la tortue et ne pourra le faire avant d'avoir parcouru cette dernière distance. Or, pendant qu'il franchit ces 50 mètres, la tortue continuera d'avancer et se trouvera 25 m plus loin, et ainsi de suite. La tortue précédera donc toujours Achille d'une distance corrrespondant à la moitié du dernier déplacement de celui-ci. Achille ne pourra donc jamais rejoindre la tortue, une distance positive les séparant toujours.*

   EXERCICES.
   - Expliquer pourquoi la réponse de Zénon est erronée.
   - Déterminer la distance qu'aura franchie Achille lorsqu'il rejoindra la tortue.

2. *La série harmonique et la constante d'Euler*
   On a vu que la série harmonique $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}$ ne converge pas. En fait, on a démontré que, pour tout naturel strictement positif M, on a $S_M := \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m} \geq \ln(M+1)$ donc $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m} = +\infty$.
   On a un résultat plus général, à savoir que la suite

   $$x_M := S_M - \ln M = \left(\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m}\right) - \ln M, \quad M \in \mathbb{N}_0$$

   converge vers une limite finie ; celle-ci est appelée la constante d'Euler et est notée γ *(on a* $\gamma \simeq 0.577$*).*

   EXERCICE.
   Démontrer que la suite x_M $(M \in \mathbb{N}_0)$ converge vers une limite finie.

   Suggestions d'étapes.
   - Pour tout $M \geq 2$, on a $x_M = S_M - \ln M = \displaystyle\sum_{m=1}^{M-1}\left(\frac{1}{m} - \ln\left(\frac{m+1}{m}\right)\right) + \frac{1}{M}$.
   - Pour tout $m \geq 1$, on a ensuite $0 \leq \dfrac{1}{m} - \ln\left(\dfrac{m+1}{m}\right) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{x+m}\right) dx \;\leq\; \frac{1}{m^2}$
   - Conclure en utilisant des propriétés des suites et des séries convergentes.

REMARQUES
- Cette liste peut constituer une base pour un TD ou/et faire partie d'une séance de révision

1. *L'échelle de Richter : une échelle logarithmique parmi d'autres*

   Une échelle logarithmique est un système de graduation sur une demi-droite (les réels strictement positifs) particulièrement adapté pour rendre compte des ordres de grandeurs dans beaucoup d'applications. Voir par exemple le fichier annexe tiré de *Wikipédia*

   La magnitude (au sens « grandeur », sans référence préalable à une unité de mesure) d'un tremblement de terre est une mesure de l'énergie libérée lors d'un séisme. Plus la magnitude est élevée, plus le séisme a libéré d'énergie. Il s'agit d'une échelle logarithmique en base 10, c'est-à-dire qu'un accroissement de magnitude de 1 correspond à une multiplication par 10 de l'amplitude du mouvement. Les médias grand public l'indiquent souvent sur l'échelle de Richter ou sur l'échelle ouverte de Richter. Ces terminologies sont impropres : l'échelle de Richter « d'origine », est une échelle dépassée et uniquement adaptée aux tremblements de terre californiens. Les magnitudes habituellement citées de nos jours sont en fait d'un autre type, rendant compte de la géologie des lieux et de divers autres facteurs.

   La définition originale donnée par Richter en 1935, appelée désormais magnitude locale ou M_l, est une échelle logarithmique simple de la forme[1]

   $$M_l = \log(A) - \log(A_0) + c\ \log(\Delta)$$

   où A représente l'amplitude maximale mesurée sur le sismogramme[2], A_0 est une amplitude de référence correspondant à un séisme de magnitude 0 à $100km$, Δ est la distance épicentrale (km) et c est une constante de calibration[3]. Il faut noter que cette relation est empirique et que les constantes de calibration (A_0 et Δ) rendent cette définition valable seulement localement. Par exemple, dans certains cas de calibration (sur des séismes modérés de la Californie du Sud), on prend $c = 2,76$ et $\log(A_0) = 2,48$.

   EXERCICES.
   - Expliquer pourquoi une augmentation d'une unité sur l'échelle de Richter correspond à la multiplication par 10 de l'amplitude mesurée sur le sismogramme.
   - Expliquer pourquoi passer de 6 à 7 sur l'échelle de Richter est plus désastreux que de passer de 4 à 5 par exemple, alors que la différence est toujours d'une unité.

2. *Demi-vie d'une substance*

   Dans des contextes précis, la « demi-vie » est le temps mis par une substance (médicament, noyau radioactif, ou autres) pour perdre la moitié de son activité pharmacologique, physiologique ou radioactive.

   QUESTION.
   Une substance radioactive se décompose à un rythme proportionnel à la quantité présente de cette substance. S'il a fallu trois jours pour que sa masse diminue de 15%, déterminer la demi-vie de la substance. (Réponse, calculette permise : $\pm 12,8$ jours)

[1] On note log la fonction $\log_{10} = \frac{\ln}{\ln(10)}$
[2] Un sismogramme (ou séismogramme) est une représentation graphique de l'enregistrement d'une onde sismique
[3] Ce n'est pas la vitesse de la lumière

3. *Lire un énoncé et le replacer dans son contexte*

   L'énoncé suivant est tiré d'un livre.

   L'évolution au cours du temps des différences de potentiels V_1 et V_2 aux bornes des capacités peut être décrite par l'équation différentielle (matricielle) suivante

$$\begin{pmatrix} DV_1(t) \\ DV_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-(R_1+R_2)}{C_1} & \frac{R_2}{C_1} \\ \frac{R_2}{C_2} & \frac{-R_2}{C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix}$$

   Supposons que les résistances R_1 et R_2 sont respectivement de $\frac{1}{2}\Omega$ et de 1Ω et que les capacités C_1 et C_2 sont respectivement de $2F$ et de $1F$. Supposons également qu'initialement, il y a une différence de potentiel de $5V$ dans la capacité C_1 et de $4V$ dans la capacité C_2. Décrire l'évolution de V_1 et V_2 au cours du temps.

   QUESTION.

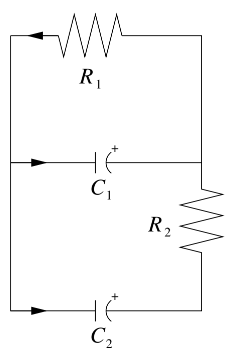
   Cet énoncé est manifestement erroné. Pourquoi ?

4. *Diagonalisation et équations différentielles*

   Dans le circuit électrique suivant, l'évolution au cours du temps des différences de potentiels V_1 et V_2 aux bornes des capacités est décrite par l'équation différentielle (matricielle) suivante

$$\begin{pmatrix} DV_1(t) \\ DV_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-(R_1+R_2)}{C_1R_1R_2} & \frac{1}{C_1R_2} \\ \frac{1}{C_2R_2} & \frac{-1}{C_2R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix}$$

   Supposons que les résistances R_1 et R_2 sont respectivement de $\frac{1}{2}\Omega$ et de 1Ω et que les capacités C_1 et C_2 sont respectivement de $2F$ et de $1F$. Supposons également qu'initialement, il y a une différence de potentiel de $5V$ dans la capacité C_1 et de $4V$ dans la capacité C_2.



   QUESTION.

   Décrire l'évolution de V_1 et V_2 au cours du temps. (Solution : $V_1(t) = 3e^{-t/2} + 2e^{-2t}$, $V_2(t) = 6e^{-t/2} - 2e^{-2t}$)

Échelle logarithmique

Une **échelle logarithmique** est un système de graduation sur une demi-droite $[Ox)$, particulièrement adapté pour rendre compte des ordres de grandeur dans les applications. De plus elle permet de rendre accessible une large gamme de valeurs.

Sommaire

Définition de l'échelle logarithmique

L'échelle logarithmique n'est définie que pour des valeurs strictement positives. Une base logarithmique *b* est choisie, correspondant à un type de logarithme, les plus courants étant :

- le logarithme népérien, dont la base est e.
- en statistiques, *généralement* le logarithme décimal (base 10).
- en informatique, le logarithme de base 2.

Toute autre base reste possible, elles sont seulement plus rarement utilisées. Les échelles obtenues sont identiques à un rapport près, seuls les calculs de pente seront différents.

L'origine (le zéro) de l'échelle correspond à la valeur $b^0 = 1$; vers la droite (ou : vers le haut), le nombre *b* est placé à une unité de l'origine, b^2 à deux unités, b^3 à trois unités, etc. Vers la gauche (ou : vers le bas), on trouve les puissances négatives de *b* : b^{-1} ($= 1/b$) à une unité, $b^{-2} = 1 / b^2$ à deux unités, etc.

Plus généralement, un nombre x est placé sur l'échelle à une distance $\log_b(x)$: c'est sa **coordonnée logarithmique**.

Sur ce type d'échelle, les grands nombres sont comprimés très proches de l'origine et facilement représentés (en base 10 par exemple, un nombre dix fois plus grand est seulement une unité plus loin), en revanche les nombres entre 0 et 1 sont dilatés et très vite renvoyés vers l'infini négatif.

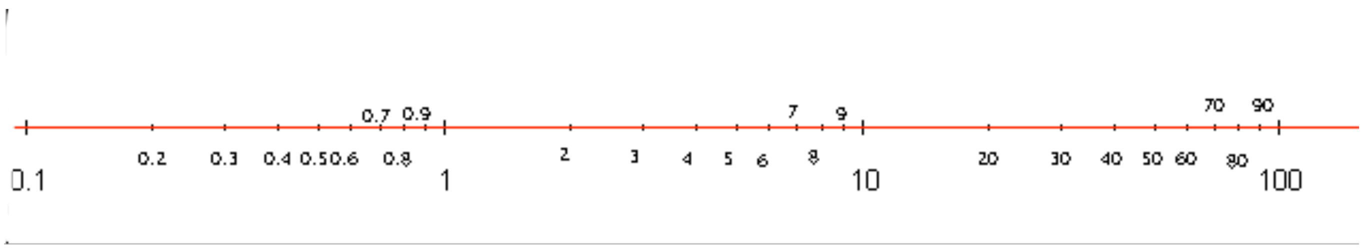
Illustrations avec une échelle logarithmique de base 10

Construction d'une échelle logarithmique

Dans ce système de graduation, le nombre étiqueté n est placé à une distance log(n) de l'origine , le logarithme employé ici est le logarithme décimal

- La distance qui sépare 1 de 10 est la même que celle qui sépare 10 de 100 et celle qui sépare 0,1 de 1 car log(100) - log(10) = log(10) - log(1) = log(1) - log(0,1). Chacun de ces intervalles s'appelle un module.
- la distance qui sépare 1 de 2 est égale à celle qui sépare 10 de 20 mais est supérieure à celle qui sépare 2 de 3 car log(2) - log(1) = log(20) - log(10) > log(3) - log(2).

Cela induit une sorte d'irrégularité récurrente dans les graduations.



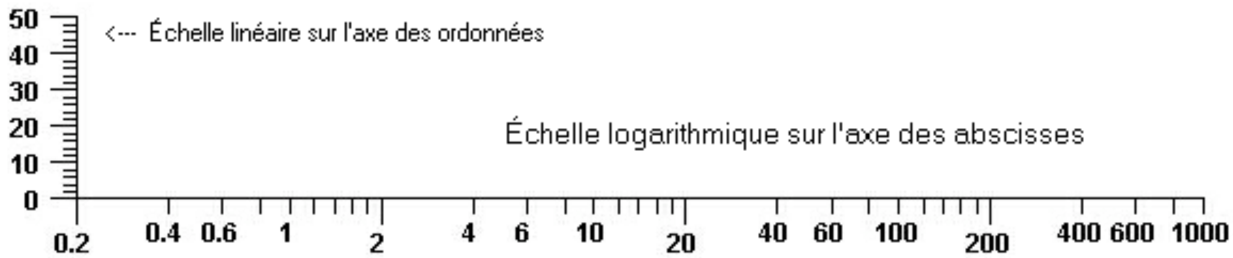
Exemple d'échelle logarithmique à trois modules

L'**échelle logarithmique** est une alternative à l'échelle linéaire. Elle peut s'avérer préférable pour deux raisons :

- **Situation 1 :** Lorsqu'on étudie un phénomène utilisant une gamme étendue de valeurs, l'échelle linéaire est mal adaptée. On lui préfère une échelle logarithmique qui espace les valeurs faibles et rapproche les valeurs fortes.

- **Situation 2 :** Certaines sensations suivent la loi de Weber-Fechner qui affirme qu'elles peuvent «*croître comme le logarithme de l'excitant*.» L'échelle logarithmique donne alors un reflet fidèle de la perception subjective.

Comparaison d'une échelle linéaire et d'une échelle logarithmique



Le schéma ci-dessus permet de visualiser les deux types d'échelles :

- Pour l'échelle *linéaire*, deux graduations dont la **différence** vaut 10 sont à distance constante.
- Pour l'échelle *logarithmique*, deux graduations dont le **rapport** vaut 10 sont à distance constante.

Exemples d'utilisations

- en physique
  - Magnitude d'un séisme
  - pH
  - Magnitude des étoiles
- en musique
  - Spectre sonore
- en électronique
  - Électronique analogique
  - Réponse en fréquence
  - Filtre électronique
- en géologie
  - Courbe de Hjuström

Notes

Voir aussi

Articles connexes

- Repère semi-logarithmique
- Repère log-log
- Analyse spectrale

Liens externes

(en) Papier semi-log vierge[1] (http://www.incompetech.com/graphpaper/logarithmic/)