1, 2, 3... Sciences

Eléments de mathématiques de l'enseignement secondaire

Version provisoire

Prérequis en vue de la première année de bachelier en Biologie, Chimie, Géographie, Géologie, Physique et Informatique

J. Crasborn
Année académique 2008 - 2009

Pour toi, étudiant de 1^{er} BAC Sciences qui prends conscience de certains oublis ou de points de matière de l'enseignement secondaire que tu ne maîtrises pas suffisamment et qui souhaites y remédier,

pour toi qui viens de terminer tes études secondaires et qui désires réviser tes connaissances afin de mettre toutes les chances de ton côté pour ta première année à l'université en Faculté des Sciences,

pour toi, élève de l'enseignement secondaire qui souhaites te préparer avec sérieux pour des études scientifiques,

mais aussi

pour tous les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire soucieux de savoir ce qu'on souhaiterait comme connaissances de la part des étudiants qui arrivent en 1^{er} BAC Sciences et leur permettre d'aider ces derniers à se préparer à relever le défi,

pour vous tous, amoureux des mathématiques,

j'ai rédigé ce fascicule. Qu'il soit une aide pour tous !

Je m'en voudrais de ne pas profiter de cette occasion pour exprimer toute ma gratitude à Françoise Bastin pour l'accueil qu'elle réserve toujours à mes initiatives, pour toutes les critiques constructives dont elle me fait part et, en bref, pour tout ce que je lui dois et qu'il serait trop long à énumérer ici.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2008 - 2009

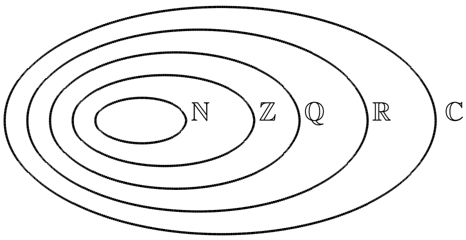
Chapitre 1

Algèbre

1.1 Les nombres

1.1.1 Définitions - Notations

1. Ensemble des nombres naturels, noté $\mathbb{N}$: $\{0, 1, 2, \ldots\}$.
2. Ensemble des nombres entiers, noté $\mathbb{Z}$: $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
3. Ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$: $\left\{\dfrac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$.
4. Ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, comprenant les nombres décimaux limités ou illimités (périodiques ou non).
5. Ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$[1].



On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, les inclusions étant strictes. Ces ensembles, privés de 0, sont notés respectivement $\mathbb{N}_0,\ \mathbb{Z}_0,\ \mathbb{Q}_0,\ \mathbb{R}_0,\ \mathbb{C}_0$.
Les nombres réels non rationnels (donc appartenant à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) sont appelés nombres irrationnels.

1.1.2 Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{R}$, on définit une relation d'ordre (il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$) qui possède notamment la propriété suivante : $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$ ou $b \leq a$.

Propriétés relatives à
• **l'addition**

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : \quad \begin{aligned} & a < b \text{ et } c \leq d \Rightarrow a + c < b + d \\ & a \leq b \text{ et } c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d \end{aligned}$$

[1]Dans la suite, nous ne travaillerons qu'avec des réels.

• **la multiplication**

$$\forall a, b, r \in \mathbb{R} : \quad \begin{array}{l} r > 0 \text{ et } a < b \Rightarrow ra < rb \\ r \geq 0 \text{ et } a < b \Rightarrow ra \leq rb \\ r < 0 \text{ et } a < b \Rightarrow ra > rb \\ r \leq 0 \text{ et } a < b \Rightarrow ra \geq rb \end{array}$$

On constate donc que la relation d'ordre est inversée par multiplication par un réel négatif.

On a également la propriété suivante : $\forall a, b > 0 : a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$.
Si l'un au moins des réels est négatif, cette équivalence n'est pas nécessairement vraie comme le montre les exemples suivants. On a en effet

$$-2 \leq 1 \text{ et } 4 \geq 1, \qquad -1 \leq 4 \text{ et } 1 \leq 16, \qquad -2 \leq -1 \text{ et } 4 \geq 1.$$

1.1.3 Intervalles dans $\mathbb{R}$

• **Intervalles bornés**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervalle fermé)
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervalle ouvert)
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

• **Intervalles non bornés**

Soit $r \in \mathbb{R}$.
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
- $]-\infty, r] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq r\}$ (intervalle fermé)
- $]-\infty, r[= \{x \in \mathbb{R} : x < r\}$ (intervalle ouvert)
- $[r, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq r\}$ (intervalle fermé)
- $]r, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > r\}$ (intervalle ouvert)

1.1.4 Valeur absolue d'un réel

Définition

La valeur absolue (ou module) d'un nombre réel est ce réel s'il est positif et son opposé s'il est négatif.
Si on note $|x|$ la valeur absolue du réel x alors $|x| = \left\{ \begin{array}{lll} x & \text{si} & x \geq 0 \\ -x & \text{si} & x \leq 0 \end{array} \right.$.

Exemples : $|-3| = -(-3) = 3$; $|1/3| = 1/3$; $|0| = 0$.

Propriétés

1. $\forall a \in \mathbb{R} : |a| \geq 0, \quad |a| = |-a|, \quad a \leq |a|, \quad -a \leq |a|$.
2. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|, \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|$.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |ab| = |a| \; |b|$ et $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$.
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
5. $\forall a \in \mathbb{R}, \; \forall r > 0 : |a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$ et $|a| \geq r \Leftrightarrow a \leq -r$ ou $a \geq r$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \; \forall r > 0 : |a - b| \leq r \Leftrightarrow b - r \leq a \leq b + r$.

1.1.5 Puissances entières - Racines

Puissances entières

Si $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}_0$ alors $x^m = x \,.\, x \,.\, \ldots \,.\, x$ (produit de m facteurs égaux à x). Par convention, $x^0 = 1$.
Si $x \in \mathbb{R}_0$ et $m \in \mathbb{N}$ alors $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$.

Propriétés

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \text{si } m \text{ est pair} & \text{alors} \quad x^m \geq 0 \\ \text{si } m \text{ est impair} & \text{alors} \quad x^m \text{ a le même signe que } x \end{cases}$
2. $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{N} : |a^m| = |a|^m$.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a| \leq |b| \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$.
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ et $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Extraction de racines

L'extraction de racines est l'opération inverse de l'élévation à une puissance naturelle.

Soit $m \in \mathbb{N}_0$.
• Si m **est pair**, la racine m-ème d'un réel **positif** x est le réel **positif** y dont la m-ème puissance vaut x ou encore

$$\forall x \geq 0,\ \sqrt[m]{x} = y \geq 0 \text{ tel que } y^m = x.$$

• Si m **est impair**, la racine m-ème d'un réel x est le réel y dont la m-ème puissance vaut x ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt[m]{x} = y \text{ tel que } y^m = x.$$

Propriétés

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0 : (\sqrt{x})^2 = x.$$

1.2 Résolution d'équations à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Utilité
- Solution de problèmes par mise en équation.
- Recherche des zéros d'une fonction (ou de ses dérivées) en vue de l'étude graphique d'une fonction.
- Conditions d'existence d'une fraction rationnelle en vue de déterminer son domaine de définition.

1.2.1 Définitions et principes d'équivalence

- Deux **équations** sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.
- Une **équation** est **impossible** si l'ensemble de ses solutions est vide.
- Une **équation** est **indéterminée** si l'ensemble de ses solutions est $\mathbb{R}$.

Principes d'équivalence

1. Si on ajoute un même réel aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.
2. Si on multiplie les deux membres d'une équation par un même réel non nul, on obtient une équation équivalente.
3. L'ensemble des solutions de l'équation $E_1(x) \,.\, E_2(x) = 0$ est l'union des ensembles de solutions des équations $E_1(x) = 0$ et de $E_2(x) = 0$, à d'éventuelles conditions d'existence près.

1.2.2 Equations entières (sans inconnue au dénominateur)

Premier degré

Une équation du premier degré à une inconnue réelle x est une équation du type $ax+b=0,\ a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

Résolution

• Cette équation a pour solution $x = \dfrac{-b}{a}$.

• Cependant, si on envisage $a = 0$ alors $\begin{cases} \text{si} & b \neq 0, & \text{l'équation est impossible.} \\ \text{si} & b = 0, & \text{l'équation est indéterminée.} \end{cases}$

Deuxième degré

Une équation du second degré à une inconnue réelle x est une équation du type

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Résolution

• Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors $x = \dfrac{-b}{2a}$.

• Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation est impossible dans $\mathbb{R}$.

Equations réductibles au deuxième degré

Ce sont des équations du type $ax^{2n} + bx^n + c = 0,\ a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0, n \in \mathbb{N}_0$.
Pour les résoudre, on pose $x^n = y$; l'équation s'écrit alors $ay^2 + by + c = 0$. On résout cette équation comme ci-dessus puis on calcule, si elles existent, les racines n-èmes des valeurs trouvées pour y.

Dans les autres cas

1. Ecrire l'équation sous la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$.
2. Factoriser $P(x)$, si c'est possible, pour se ramener à un produit de facteurs du premier ou du second degré (éventuellement affectés d'un exposant)
3. Appliquer le troisième principe d'équivalence ci-dessus.

Principales méthodes de factorisation

1. Produits remarquables
   $\forall a, b \in \mathbb{R}$:
   • $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
   • $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$
   • $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
   • $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

   $\forall a, b, c, x \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, si $\Delta > 0$ et si x_1 et x_2 sont les zéros du polynôme.

2. Groupements
   Exemple :
   $x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x^3 + x^2) - (4x + 4) = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2-4) = (x+1)(x-2)(x+2)$.

3. Méthode des diviseurs binômes et grille de Hörner
   Soient les polynômes $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ x \in \mathbb{R}$ dont les coefficients sont des entiers avec $a_n \neq 0$ et $Q(x) = x - a,\ a \in \mathbb{Z}$.
   Si P est divisible par Q alors a est un diviseur entier du terme indépendant a_0 de P. Dès lors, pour trouver les diviseurs de la forme $x - a$ de P, on commence par chercher les diviseurs entiers de a_0 et on recherche ensuite, parmi eux, ceux qui annulent P.

   Exemple : factorisation de $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$.
   Les diviseurs entiers de 2 sont $\pm 1, \pm 2$. En calculant successivement $P(1),\ P(-1),\ P(2)$, on s'aperçoit que $P(2) = 0$ et, dès lors, P est divisible par $x - 2$ et on a $P(x) = (x-2)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2.
   La recherche du polynôme quotient Q se fait aisément par la méthode dite de Hörner.
   Pour l'exemple ci-dessus, la grille de Hörner est

	1	-3	3	-2
2		2	-2	2
	1	-1	1	0

   Les 3 premiers élements de la dernière ligne sont les coefficients du quotient ordonné selon les puissances décroissantes de x ; le dernier doit toujours être nul puisque c'est le reste de la division des 2 polynômes et que P est divisible par $x - 2$. On a donc $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x-2)(x^2 - x + 1)$.

   Remarque : lorsque le polynôme P n'est pas complet, on le complète avec des coefficients nuls.

1.2.3 Equations fractionnaires (inconnue au dénominateur)

1. Ecrire et analyser les conditions d'existence (dénominateurs $\neq 0$)
2. Réduire tous les termes au même dénominateur (p.p.c.m des dénominateurs apparaissant dans les deux membres de l'équation)
3. Multiplier les deux membres de l'équation par le dénominateur ainsi obtenu et écrire l'équation sous la forme d'un polynôme égalé à zéro.
4. Résoudre l'équation entière ainsi obtenue comme indiqué ci-dessus.
5. Eliminer les solutions non compatibles avec les conditions d'existence.

Exemple : résoudre $\dfrac{1}{x^2-4} + \dfrac{x-4}{x(x+2)} = \dfrac{1}{x(x-2)}$

Cet exercice est défini si $x^2 - 4 \neq 0,\ x(x+2) \neq 0$ et $x(x-2) \neq 0$ ce qui équivaut à $x \neq 0,\ \pm 2$. Le dénominateur commun est égal à $x(x-2)(x+2)$. En réduisant au même dénominateur et en effectuant les opérations indiquées ci-dessus, on a successivement

$$\frac{1}{x^2-4} + \frac{x-4}{x(x+2)} = \frac{1}{x(x-2)} \Leftrightarrow x + (x-4)(x-2) - (x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 0.$$

Cette équation du second degré a pour solutions $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$. Ces valeurs étant compatibles avec les conditions d'existence sont les solutions de l'équation donnée.

1.3 Résolution d'inéquations à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Utilité : condition d'existence d'une racine d'indice pair en vue de la détermination du domaine de définition d'une fonction.

1.3.1 Signe du binôme $\mathbf{ax+b},\ \mathbf{a,b}\in\mathbb{R}\ (\mathbf{a}\neq\mathbf{0})$

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	signe de $(-a)$	0	signe de a

1.3.2 Signe du trinôme $\mathbf{ax^2+bx+c},\ \mathbf{a,b,c}\in\mathbb{R}\ (\mathbf{a}\neq\mathbf{0})$

• $\Delta>0$: si x_1 et x_2 $(x_1<x_2)$ sont les zéros du trinôme, on a

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

• $\Delta=0$: si $x_1=x_2$ est le zéro double du trinôme, on a

x		$x_1=x_2$	
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de a

• $\Delta>0$

x	
ax^2+bx+c	signe de a

1.3.3 Principes d'équivalence

1. Si on ajoute un même réel aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente.
2. Si on multiplie les deux membres d'une inéquation par un même réel
   a) **strictement positif**, on obtient une inéquation équivalente
   b) **strictement négatif**, on obtient une inéquation équivalente **à condition de changer le sens** de l'inéquation donnée.

ATTENTION : ne jamais multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un facteur dont on ne connaît pas le signe, ce qui est souvent le cas s'il contient l'inconnue.

1.3.4 Inéquations entières

Premier degré

Ecrire l'inéquation sous la forme $ax\leq b$ (resp. $\geq,\ <,\ >)(a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$ puis diviser les deux membres par a en tenant compte du signe de a.

Dans TOUS les autres cas

1. Ecrire l'inéquation sous la forme $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\leq 0$ (resp. $\geq,\ <,\ >$).
2. Factoriser $P(x)$, si c'est possible, pour se ramener à un produit de facteurs du premier ou du second degré (éventuellement affectés d'un exposant).
3. Chercher les zéros des différents facteurs trouvés ci-dessus.
4. Faire un tableau de signes en classant, par ordre croissant, tous les zéros trouvés puis en indiquant le signe de chacun des facteurs de $P(x)$ en tenant compte de leurs éventuels exposants. On applique alors la règle des signes dans le cas d'un produit.

5. Déterminer l'ensemble des solutions en prenant les valeurs de x qui donnent le signe demandé pour $P(x)$

Exemple : résoudre $P(x) = (x+1)(x^2-3x+2)(-x^2+5x-6) \geq 0$.

Les zéros des différents facteurs sont $-1,\ 1,\ 2$ et 3. On construit le tableau

x		-1		1		2		3	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-3x+2	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-x^2+5x-6$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Dès lors, l'ensemble des solutions est $S =]-\infty, -1] \cup [1, 3]$.

1.3.5 Inéquations fractionnaires

1. Ecrire et analyser les conditions d'existence (dénominateurs $\neq 0$)
2. Ramener tous les termes dans un même membre en ajoutant les mêmes expressions aux deux membres de l'inéquation.
3. Réduire tous les termes au même dénominateur (p.p.c.m des dénominateurs)
   ATTENTION : ne pas supprimer le dénominateur ainsi obtenu (on n'en connaît généralement pas le signe).
4. Factoriser le numérateur et le dénominateur de l'expression trouvée pour avoir des facteurs du premier ou second degré (éventuellement affectés d'un exposant).
5. Chercher les zéros de tous les facteurs (numérateur et dénominateur) trouvés ci-dessus.
6. Faire un tableau de signes (cf. inéquations entières)
7. Déterminer l'ensemble des solutions en prenant les valeurs de x qui donnent le signe demandé, en éliminant les solutions non compatibles avec les conditions d'existence.

1.3.6 Systèmes d'inéquations à une inconnue

On résout chaque inéquation séparément puis on détermine l'intersection de tous les ensembles de solutions obtenus.

1.4 Système de deux équations linéaires à deux inconnues réelles

1.4.1 Principes d'équivalence

Deux **systèmes** sont **équivalents** s'ils admettent le même ensemble de solutions.
Un **système** est **compatible** s'il possède au moins une solution ; sinon, il est **incompatible** (ou impossible).

1. Si, dans un système d'équations, on remplace une équation par l'équation obtenue en multipliant ses deux membres par un même réel non nul, on obtient un système équivalent au système donné.
2. Si, dans un système d'équations, on remplace une équation par l'équation obtenue en additionnant membre à membre cette équation et une ou plusieurs autres, on obtient un système équivalent au système donné.
3. Si on résout une équation d'un système donné par rapport à une inconnue et si on remplace alors, dans les autres équations, cette inconnue par le résultat trouvé, on obtient un système équivalent au système donné.

1.4.2 Méthodes de résolution

Substitution

Pour éliminer une inconnue, on résout une des équations du système par rapport à cette inconnue puis on substitue la valeur obtenue dans l'autre équation.

Exemple : résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y=19 \\ 2x-3y=4 \end{array}\right.$

Eliminons y entre les deux équations. La première donne $y=\dfrac{19-3x}{2}$. En introduisant cette valeur de y dans la seconde équation, il vient $2x-3\dfrac{19-3x}{2}=4 \Leftrightarrow 13x=65$. Ainsi, le système donné est équivalent à $\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{19-3x}{2} \\ 13x=65 \end{array}\right.$ et la solution du système est $\left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=2 \end{array}\right.$.

Combinaison linéaire

Pour éliminer une inconnue, on multiplie chaque équation par un réel non nul de telle sorte qu'en additionnant membre à membre les équations obtenues, on ait une équation qui ne renferme plus qu'une seule inconnue.

Exemple : résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} 8x+15y=31 \\ 7x-10y=4 \end{array}\right.$

Multiplions les deux membres de la première équation par 2 et ceux de la deuxième par 3 en vue d'éliminer les y. Le système devient $\left\{\begin{array}{l} 16x+30y=62 \\ 21x-30y=12 \end{array}\right.$ et en additionnant membre à membre ces deux équations, on obtient $37x=74$.
Le système donné est alors équivalent au système $\left\{\begin{array}{l} 37x=74 \\ 8x+15y=31 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ 15y=15 \end{array}\right.$ et la solution du système est $\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right.$.

1.5 Division des polynômes

Diviser un polynôme P de degré p par un polynôme D de degré $d \leq p$, c'est chercher un polynôme Q de degré $q=p-d$ et un polynôme R de degré $r<d$ tels que $P(x)=D(x)Q(x)+R(x),\ x \in \mathbb{R}$.
Le polynôme D est le polynôme diviseur, Q est le quotient et R le reste.

Exemple : diviser $P(x)=4x^5+3x^4-x^2+1$ par $D(x)=x^2+1$.

On détermine le quotient de la division de $4x^5$ par x^2 (les termes dont l'exposant est le plus élevé pour chacun des polynômes) : on obtient $4x^3$. On multiplie alors $D(x)$ par $4x^3$: on obtient ainsi un polynôme que l'on soustrait de $P(x)$ et on recommence des calculs analogues avec le polynôme obtenu en additionnant les différents quotients partiels jusqu'à ce que le degré du polynôme obtenu après soustraction soit strictement inférieur au degré de $D(x)$. Voici ce qu'on obtient successivement

$$
\begin{array}{rrrrrr|c}
4x^5 & +3x^4 & +0x^3 & -x^2 & +0x & +1 & x^2+1 \\
4x^5 & & +4x^3 & & & & \hline 4x^3+3x^2-4x-4 \\
\cline{1-6}
 & 3x^4 & -4x^3 & -x^2 & +0x & +1 & \\
 & 3x^4 & & +3x^2 & & & \\
\cline{2-6}
 & & -4x^3 & -4x^2 & +0x & +1 & \\
 & & -4x^3 & & -4x & & \\
\cline{3-6}
 & & & -4x^2 & +4x & +1 & \\
 & & & -4x^2 & & -4 & \\
\cline{4-6}
 & & & & 4x & +5 &
\end{array}
$$

Ainsi, $P(x) = 4x^5 + 3x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + 1)(4x^3 + 3x^2 - 4x - 4) + 4x + 5$.

1.6 Décomposition d'une fraction rationnelle en une somme de fractions simples

1.6.1 Définitions

1. Une **fraction rationnelle** est le quotient de deux polynômes.
2. Une **fraction rationnelle** est **propre** lorsque
   1) le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur
   2) le numérateur et le dénominateur n'ont pas de zéro commun.
3. Les **fractions rationnelles simples** sont du type
   1) $\dfrac{A}{(ax+b)^n}$ où $A,\ a,\ b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}_0$
   2) $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ où $A,\ B,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}_0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

1.6.2 Décomposition

1. Si la fraction n'est pas propre, il faut simplifier les facteurs communs s'il y en a et/ou effectuer la division du numérateur par le dénominateur. Dans ce dernier cas, la fraction s'écrit comme la somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle propre.
2. La fraction étant propre, on factorise le dénominateur de telle sorte à n'avoir que des facteurs du type $(ax + b)^n$ ou $(ax^2 + bx + c)^n$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
3. Par application du théorème de décomposition, on écrit alors la fraction comme somme de fractions simples dont on cherche la valeur des coefficients des différents numérateurs. Cette recherche peut s'effectuer de deux façons différentes, soit par identification de polynômes, soit en appliquant le théorème disant que si deux polynômes en x de degré p prennent la même valeur numérique pour plus de p valeurs de x alors ils sont identiques ($p + 1$ valeurs suffisent).

1.6.3 Exemples

• Décomposer $\dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$. La fraction étant propre, vu le théorème de décomposition, on a

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x-2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 2\}.$$

On doit alors déterminer les valeurs des réels $A,\ B,\ C$ et D. En réduisant ces fractions au même dénominateur puis en égalant les numérateurs, on a

$$x^2 + 2 = A(x+1)^2(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x-2) + D(x+1)^3,\ x \in \mathbb{R}$$

ce qui est équivalent à

$$x^2+2=(A+D)x^3+(B+3D)x^2+(-3A-B+C+3D)x+(-2A-2B-2C+D).$$

Par identification des polynômes, on a

$$\begin{cases} A+D=0 \\ B+3D=1 \\ -3A-B+C+3D=0 \\ -2A-2B-2C+D=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-D \\ B=1-3D \\ 3D-1+3D+C+3D=0 \\ 2D-2+6D-2C+D=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-D \\ B=1-3D \\ C=1-9D \\ 9D-2+18D=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{2}{9} \\ B=\frac{1}{3} \\ C=-1 \\ D=\frac{2}{9} \end{cases}.$$

Dès lors,

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{-2}{9(x+1)}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{2}{9(x-2)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 2\}.$$

• Décomposer $\frac{3x^2+2}{(x^2+1)(x-2)^2}$. La fraction étant propre, vu le théorème de décomposition, on a

$$\frac{3x^2+2}{(x^2+1)(x-2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}.$$

On doit alors déterminer les valeurs des réels A, B, C et D. En réduisant ces fractions au même dénominateur puis en égalant les numérateurs, on a

$$3x^2+2=(Ax+B)(x-2)^2+C(x^2+1)(x-2)+D(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}.$$

Puisque cette égalité est vraie pour toute valeur de x, elle l'est notamment pour 4 valeurs judicieusement choisies.
Pour $x=2$, on a $14=5D\Leftrightarrow D=\frac{14}{5}$.
Pour $x=0$, on a $2=4B-2C+\frac{14}{5}\Leftrightarrow 2B-C=-\frac{2}{5}\Leftrightarrow C=2B+\frac{2}{5}$.
Pour $x=1$, on a $5=A+B-2C+\frac{28}{5}\Leftrightarrow A+B-4B-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}\Leftrightarrow A=3B+\frac{1}{5}$.
Pour $x=-1$, on a $5=-27B-\frac{9}{5}+9B-12B-\frac{12}{5}+\frac{28}{5}\Leftrightarrow 30B=-\frac{18}{5}\Leftrightarrow B=-\frac{3}{25}$.
Ainsi, on a

$$\begin{cases} D=\frac{14}{5} \\ B=-\frac{3}{25} \\ A=-\frac{4}{25} \\ C=\frac{4}{25} \end{cases}$$

et

$$\frac{3x^2+2}{(x^2+1)(x-2)^2}=\frac{-4x-3}{25(x^2+1)}+\frac{4}{25(x-2)}+\frac{14}{5(x-2)^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}.$$

1.7 Binôme de Newton

1.7.1 Définitions

• Si m est un naturel non nul, la **factorielle** de m, notée $m!$, est le produit des m premiers naturels non nuls.
Par convention, $0!=1$.

• Le symbole C_m^p représente le nombre de combinaisons simples de p éléments distincts pris parmi m éléments distincts ($p,m\in\mathbb{N}$ avec $p\leq m$) c'est-à-dire le nombre de sous-ensembles de p éléments distincts pris parmi m éléments distincts. On a $C_m^p=\dfrac{m!}{p!\ (m-p)!}$

1.7.2 Formule du binôme

$\forall\ a,\ x \in \mathbb{R}$ et $\forall\ M \in \mathbb{N}_0$ on a $(x+a)^M = \sum_{k=0}^{M} C_M^k x^k a^{M-k}$.

1.7.3 Exemple

Recherche du coefficient de x^7 dans le développement de $(x^2 - \frac{1}{x})^8$ $(x \neq 0)$.

En appliquant la formule du binôme, on a $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k\ (x^2)^k\ (-\dfrac{1}{x})^{8-k}$, expression égale à

$$\sum_{k=0}^{8} C_8^k\ x^{2k}\ (-1)^{8-k}\ (x^{-1})^{8-k} = \sum_{k=0}^{8} C_8^k\ (-1)^{8-k}\ x^{2k}\ x^{-8+k} = \sum_{k=0}^{8} C_8^k\ (-1)^{8-k}\ x^{3k-8}.$$

Le terme en x^7 de ce développement s'obtient pour $3k - 8 = 7 \Leftrightarrow k = 5$. On détermine le coefficient cherché en remplaçant k par 5 dans la somme ci-dessus. Dès lors, on a

$$C_8^5\ (-1)^{8-5} = -\frac{8!}{5!\ 3!} = -\frac{5!\ 6.7.8}{5!\ 2.3} = -35.$$

1.8 Quelques exercices résolus

1.8.1 Racines carrées et cubiques

1. Si x est un réel, calculer $\sqrt{16x^2}$, $\sqrt{16x^4}$, $\sqrt[3]{27x^3}$, $\sqrt[3]{-27x^3}$.

   Pour tout x réel, on a $\sqrt{16x^2} = 4|x|$, $\sqrt{16x^4} = 4x^2$ car x^2 est positif, $\sqrt[3]{27x^3} = 3x$ et $\sqrt[3]{-27x^3} = -3x$.
2. Si $x < 0$, les expressions $\sqrt{-x^3}$, $\sqrt{x^2}$ sont -elles définies ? Si oui, que valent-elles ?

   Si $x < 0$ alors $x^3 < 0$ et $-x^3 > 0$ donc $\sqrt{-x^3}$ est défini pour tout $x < 0$ et vaut $-x\sqrt{-x}$.
   Pour tout x réel, x^2 est positif donc $\sqrt{x^2}$ est défini et vaut $|x| = -x$ puisque x est négatif.

1.8.2 Valeur absolue, équations et inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1) $\lvert x+1\rvert = 2x-3$	2) $\lvert x^2-1\rvert = \lvert x+5\rvert$	3) $-1 \leq \dfrac{3x+1}{x+2} \leq 1$
4) $1 \leq \lvert 2x+1\rvert < 3$	5) $x^2+3x+2 \geq \lvert x+1\rvert$	6) $\lvert x^2+3x+2\rvert \leq x-1$

1) Par définition, $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{si} \quad x+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq -1 \\ -x-1 & \text{si} \quad x \leq -1 \end{cases}.$
Ainsi,
• si $x \geq -1$, l'équation s'écrit $x+1 = 2x-3 \Leftrightarrow x = 4$
• si $x \leq -1$, l'équation s'écrit $-x-1 = 2x-3 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$, solution à rejeter puisque $x \leq -1$.
Dès lors, l'équation a pour unique solution 4.

2) Si deux réels sont égaux en valeur absolue alors ces réels sont égaux ou opposés. L'équation donnée est donc équivalente à

$$x^2 - 1 = x + 5 \text{ ou } x^2 - 1 = -x - 5 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \text{ ou } x^2 + x + 4 = 0.$$

L'équation $x^2-x-6=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)=0$ a pour solutions -2 et 3. Par contre, l'équation $x^2+x+4=0$ n'a pas de solution réelle puisque $\Delta = 1-16 = -15 < 0$. Les solutions de l'équation donnée sont donc -2 et 3.

3) Cette inéquation n'est définie que si $x \neq -2$ et s'écrit de façon équivalente sous la forme $\left|\dfrac{3x+1}{x+2}\right| \leq 1$.
Comme $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|},\ x,y \in \mathbb{R},\ y \neq 0$ et que $|y| > 0$, l'inéquation ci-dessus est équivalente à $|3x+1| \leq |x+2|$.[2]
Vu que $|3x+1|$ et $|x+2|$ sont des réels positifs, on a $|3x+1| \leq |x+2| \Leftrightarrow (3x+1)^2 \leq (x+2)^2 \Leftrightarrow (3x+1)^2 - (x+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (3x+1+x+2)(3x+1-x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (4x+3)(2x-1) \leq 0$. Le premier membre s'annule pour $x = -\frac{3}{4}$ ou $x = \frac{1}{2}$ et le coefficient de x^2 est positif. Dès lors, le trinôme est négatif pour les valeurs de x comprises entre $-\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$ et l'ensemble des solutions est $\left[-\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$.

4) L'inéquation $1 \leq |2x+1| < 3$ est équivalente au système $\left\{\begin{array}{ll} 1 \leq |2x+1| & (1) \\ |2x+1| < 3 & (2) \end{array}\right.$.

L'inéquation (1) peut s'écrire $(2x+1 \leq -1$ ou $2x+1 \geq 1) \Leftrightarrow (x \leq -1$ ou $x \geq 0)$ et son ensemble de solutions est $S_1 =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$.
L'inéquation (2) peut s'écrire $-3 < 2x+1 < 3 \Leftrightarrow -4 < 2x < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 1$ et son ensemble de solutions est $S_2 =]-2, 1[$.
Pour obtenir l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ, puisque les inéquations (1) et (2) doivent être vérifiées simultanément, l'ensemble S des solutions est l'ensemble des solutions qui sont communes aux deux inéquations donc l'intersection des ensembles S_1 et S_2. Ainsi, $S = S_1 \cap S_2 =]-2, -1] \cup [0, 1[$.

5) • Si $x \geq -1$, l'inéquation s'écrit $x^2+3x+2 \geq x+1 \Leftrightarrow x^2+2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$. Le carré d'un réel étant toujours positif, toute valeur de x est solution mais comme on travaille avec $x \geq -1$, l'ensemble des solutions est $S_1 = [-1, +\infty[$.
• Si $x \leq -1$, l'inéquation s'écrit $x^2+3x+2 \geq -x-1 \Leftrightarrow x^2+4x+3 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) \geq 0$ et son ensemble de solutions est $S_2 =]-\infty, -3] \cup \{-1\}$ puisque $x \leq -1$.
Dès lors, l'ensemble S des solutions de l'inéquation donnée est la réunion des ensembles S_1 et S_2 et on a $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$.

6) Les zéros du trinôme $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ sont -1 et -2. De plus, comme le coefficient de x^2 est positif, ce trinôme est positif pour les valeurs de x inférieures à -2 ou supérieures à -1 et négatif pour celles comprises entre -2 et -1. Dès lors, $|x^2+3x+2| = \left\{\begin{array}{lll} x^2+3x+2 & \text{si} & x \leq -2 \text{ ou } x \geq -1 \\ -x^2-3x-2 & \text{si} & -2 \leq x \leq -1 \end{array}\right.$
• Si $x \leq -2$ ou $x \geq -1$, l'inéquation s'écrit $x^2+3x+2 \leq x-1 \Leftrightarrow x^2+2x+3 \leq 0$, inéquation qui n'admet aucune solution puisque d'une part $\Delta = 4-12 = -8 < 0$ et d'autre part le coefficient de x^2 est positif.
• Si $-2 \leq x \leq -1$, l'inéquation s'écrit $-x^2-3x-2 \leq x-1 \Leftrightarrow x^2+4x+1 \geq 0$ et comme $\Delta = 16-4 = 12$, les zéros du trinôme sont $x_1 = \dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3}$. Ce trinôme est positif si $x \leq -2-\sqrt{3}$ ou $x \geq -2+\sqrt{3}$. Vu que $\sqrt{3} \approx 1,7$, ces zéros valent approximativement $-3,7$ et $-0,7$. Dès lors, l'ensemble des solutions est également vide puisqu'on travaille dans $[-2, -1]$.
Finalement, l'inéquation donnée n'est vérifiée pour aucune valeur de x : son ensemble de solutions est l'ensemble vide Φ.

[2] On ne peut multiplier les trois membres de l'inéquation donnée par $x+2$ car le signe de ce facteur varie selon les valeurs de x envisagées.

1.9 Quelques exercices à résoudre ... et leurs solutions

1.9.1 Exercices

1. Résoudre les équations suivantes (x est l'inconnue réelle)

    1. $9x^2 = 5$
    2. $15x^2 + 2x - 2 = 2(3 - 12x)$
    3. $9x^2 - 12x + 16 = 0$
    4. $x^2 + \sqrt{2} = 0$
    5. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x} = 1$
    6. $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{6}{x+1}$
    7. $\dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{1}{x(x-2)} + \dfrac{x-4}{x(x+2)} = 0$
    8. $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0$
    9. $x^4 - 36 = 5x^2$
    10. $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$
    11. $\dfrac{7}{x+4} + \dfrac{x^2-7}{x+1} = \dfrac{4x-5}{x^2+5x+4}$
    12. $|x| = x + 1$
    13. $x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$
    14. $|12 - 7x| = 12$
    15. $\dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{5(x+10)}{15} = \dfrac{3(x+2)}{4}$
    16. $\dfrac{2x}{2-x} - \dfrac{3x-1}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{-2}{x+3}$
    17. $(x-1)(4x+3) = (x-1)(x+1)$
    18. $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{7}{3}$
    19. $x^{-1} + 2^{-2} = 4 + 2x^{-1}$
    20. $(x^2 - 5x + 1)^2 = (x^2 + 4x - 1)^2$
    21. $2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 = 0$
    22. $3(x-2)^2 + 4(x^2 - 4) - 7x^2 + 14x = 0$
    23. $3x(2-x)(\dfrac{x}{3} - \dfrac{9}{8}) = 0$
    24. $(x-4)^2 = (x-1)(x+3)$
    25. $\dfrac{2x+1}{x+3} = \dfrac{4x+3}{2x+5}$
    26. $\sqrt{2}\, x^2 + 3\sqrt{3} - \sqrt{8} = 0$
    27. $2x^3 - 13x^2 + 17x + 12 = 0$
    28. $x^2 - 9 = 3 - x$
    29. $(2x-1)^2 - (4x+3)^2 = 0$
    30. $(2x-1)^2 - 4x(2x-1) = 3(2x-1)$
    31. $|2x| + |x-3| = 3x - 1$
    32. $|2x+5| = 4$
    33. $|1-x| - |3x+2| = 0$
    34. $|2-x| + 3\,|5-2x| = 3 + |-x|$
    35. $|x^2 + x - 1| = 3 - x$
    36. $|x-5| - |x^2 - 25| = 0$

2. Résoudre les inéquations suivantes (x est l'inconnue réelle)

    1. $9 - x^2 > 0$
    2. $x^2 + 1 < 0$
    3. $x^2 - 4x + 4 > 0$
    4. $(x-1)(x^2 - 5x + 6)(x-3)^2 \leq 0$
    5. $x^3(x+1)^2(-2x^2 - x + 6) < 0$
    6. $x^2 \leq x$
    7. $\dfrac{(-2x+1)^2(-3x^2+x+6)}{x^2-4} \geq 0$
    8. $2x^3 - x + 1 \geq 0$
    9. $\dfrac{3x+5}{x^2-x} < 1$
    10. $5x \geq \dfrac{2}{x}$
    11. $\dfrac{x+1}{x(x-1)} \leq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$
    12. $|4 - 3x| \leq 5$
    13. $6x^3 - x^2 - 9x + 4 \geq 0$
    14. $(7-3x)(x^2-1) > (x^2-1)(2x+1)$
    15. $(x-2)^2 > 9(x+1)^2$
    16. $(4-2x)^3 < 0$
    17. $\dfrac{4}{x-2} \leq \dfrac{1}{x}$
    18. $\dfrac{x+2}{x-2} > \dfrac{x-2}{x+2}$
    19. $|1 - 3x| \geq 3$
    20. $x^2 < 4$
    21. $\dfrac{(x^2+1)^2}{4x^2} > 1$
    22. $\dfrac{x+6}{2} \leq x + \dfrac{9}{2} - \dfrac{x+3}{2}$
    23. $x^2 + 2x - 5 \geq 4|x+1|$
    24. $|x+1| + |x-2| < 3$

3. Résoudre les systèmes d'inéquations suivants (x est l'inconnue réelle)

    1. $\begin{cases} 2x + 1 > x - \dfrac{3}{2} \\ 2x - 1 < 1 - 3x \end{cases}$
    2. $\begin{cases} x^2 \leq 3 \\ \dfrac{4x}{x-2} < 1 \end{cases}$
    3. $-x \leq 2 + x \leq 7 + 3x$
    4. $\begin{cases} 4 \leq x^2 \\ \dfrac{x-3}{2-x} > 0 \end{cases}$
    5. $\begin{cases} -x \leq 22 + x \\ |x| > 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{(x-1)(2+x)} < 0 \\ \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2-1} \leq 0 \\ \dfrac{(x^2+1)^2}{4x^2} \geq 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} |x-2| \leq 5 \\ |2x| > 0 \end{cases}$

8. $-1 \leq |5-2x| < 6$

4. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants (x, y, z sont les inconnues réelles)

1. $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{5} - \dfrac{5y-1}{3} = 2 \\ \dfrac{x-4}{2} - \dfrac{2-3y}{4} = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{2x+4}{5} + \dfrac{3y+1}{2} = 1 \\ \dfrac{3x+1}{5} - \dfrac{6y-7}{2} = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{4x+3}{2} + \dfrac{3y+1}{3} = \dfrac{8}{3} \\ 8(3x-2) - (2y+1) = \dfrac{7}{3} \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y = x - 3y - 2 \\ 2(5-x) + 3(x+y) = 2(x+2y) + 13 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - 3(4y+8) = 5(2-3y) + x \\ 5x - 4 + 2(y+7) = 4(x-3) - (y+2) \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 3(4y+7) = 2(2-y) + 4x \\ 6(x+4) + 5(4y+3) = -11 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 4 + 4y + 2z = -3 \end{cases}$

5. Calculer le quotient Q et le reste R de la division du polynôme P par le polynôme D si

1.	$P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$	et	$Q(x) = x - 1$
2.	$P(x) = x^7 + x^3 - x + 1$	et	$Q(x) = x + 1$
3.	$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$	et	$Q(x) = x^2 - 1$
4.	$P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 2x - 5$	et	$Q(x) = x^2 + x + 1$

6. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en une somme de fractions rationnelles simples

1. $\dfrac{2x^2+4}{x^3-x^2+x-1}$
2. $\dfrac{3x^3-7x^2+3x}{x^2+1}$
3. $\dfrac{1}{x^4-1}$
4. $\dfrac{x^3-2x}{x+1}$
5. $\dfrac{1}{x^3+1}$
6. $\dfrac{x^3-2}{x^3-x^2}$
7. $\dfrac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}$
8. $\dfrac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$
9. $\dfrac{x}{x^2+x+1}$
10. $\dfrac{x^2-x-2}{x^4-5x^2+4}$

7. Que vaut le coefficient du terme

1. en x^{12} dans le développement de $(x^4 - 2x)^6$? Sol : 240
2. en x^5 dans le développement de $(x - \dfrac{2}{x})^7$ $(x \neq 0)$? Sol : -14
3. en x^3 dans le développement de $(x^3 + \dfrac{1}{x^2})^5$ $(x \neq 0)$? Sol : 0 (pas de terme en x^3)

1.9.2 Solutions

Exercice 1

1. $S = \{\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\}$
2. $S = \{-2,\ \frac{4}{15}\}$
3. $S = \Phi$
4. $S = \Phi$
5. $S = \Phi$
6. $S = \{2,\ 3\}$
7. $S = \{3 \pm \sqrt{3}\}$
8. $S = \{-7,\ -3,\ 1\}$
9. $S = \{-3,\ 3\}$
10. $S = \{-1,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\}$
11. $S = \{\pm 2\}$
12. $S = \{-\frac{1}{2}\}$
13. $S = \{\pm 1,\ 3 \pm 2\sqrt{2}\}$
14. $S = \{0,\ \frac{24}{7}\}$
15. $S = \{\frac{52}{5}\}$
16. $S = \{-\frac{1}{2}\}$
17. $S = \{-\frac{2}{3},\ 1\}$
18. $S = \{\frac{2}{5}\}$
19. $S = \{-\frac{4}{15}\}$
20. $S = \{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{9}\}$

21. $S = \{1,\ \frac{3}{2},\ 2\}$
22. $S = \{2\}$
23. $S = \{0,\ 2,\ \frac{27}{8}\}$
24. $S = \{\frac{19}{10}\}$
25. $S = \{-\frac{4}{3}\}$
26. $S = \Phi$
27. $S = \{-\frac{1}{2},\ 3,\ 4\}$
28. $S = \{-4,\ 3\}$
29. $S = \{-2,\ -\frac{1}{3}\}$
30. $S = \{-2,\ \frac{1}{2}\}$
31. $S = \{2\}$
32. $S = \{-\frac{1}{2},\ -\frac{9}{2}\}$
33. $S = \{-\frac{1}{4},\ -\frac{3}{2}\}$
34. $S = \{\frac{7}{4},\ \frac{10}{3}\}$
35. $S = \{-1 \pm \sqrt{5}\}$
36. $S = \{-6,\ -4,\ 5\}$

Exercice 2

1. $S =]-3, 3[$
2. $S = \Phi$
3. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
4. $S =]-\infty, 1] \cup [2,\ 3]$
5. $S = (]-2,\ 0[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[) \setminus \{-1\}$
6. $S = [0,\ 1]$
7. $S =]-2, \frac{1-\sqrt{73}}{6}] \cup [\frac{1+\sqrt{73}}{6}, 2[\cup \{\frac{1}{2}\}$
8. $S = [-1, +\infty[$
9. $S =]-\infty, -1[\cup]0,\ 1[\cup]5, +\infty[$
10. $S = [-\frac{\sqrt{10}}{5}, 0[\cup [\frac{\sqrt{10}}{5}, +\infty[$
11. $S =]0,\ 1[\cup [2, +\infty[$
12. $S = [-\frac{1}{3},\ 3]$
13. $S = [-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$
14. $S =]-\infty, -1[\cup]1,\ \frac{6}{5}[$
15. $S =]-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}[$
16. $S =]2, +\infty[$
17. $S =]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup]0,\ 2[$
18. $S =]-2,\ 0[\cup]2, +\infty[$
19. $S =]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{4}{3}, +\infty[$
20. $S =]-2,\ 2[$
21. $S = \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 0,\ 1\}$
22. $S = \mathbb{R}$
23. $S =]-\infty, -3-\sqrt{10}] \cup [1+\sqrt{10}, +\infty[$
24. $S = \phi$

Exercice 3

1. $S =]-\frac{5}{2}, \frac{2}{5}[$
2. $S =]-\frac{2}{3}, \sqrt{3}]$
3. $S = [-1, +\infty[$
4. $S =]2,\ 3[$
5. $S = [-11,\ -3[\cup]3, +\infty[$
6. $S =]-\infty, -2[\cup]-1,\ 0[\cup]0,\ 1[$
7. $S = [-3\ 0[\cup]0,\ 7]$
8. $S =]-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}[$

Exercice 4

1. $S = \{(8,\ 2)\}$
2. $S = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})\}$
3. $S = \{(\frac{3}{4}, -\frac{2}{3})\}$
4. $S = \{(-4,\ 1)\}$
5. $S = \Phi$
6. $S = \{(x, \frac{-3x-25}{10}) : x \in \mathbb{R}\}$
7. $S = \{(\frac{-13-10z}{11}, \frac{-16-3z}{11}, z) : Z \in \mathbb{R}\}$

Exercice 5

1. $Q(x) = x^2 - x$ et $R(x) = 3$
2. $Q(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ et $R(x) = 0$
3. $Q(x) = x + 2$ et $R(x) = 0$
4. $Q(x) = x^2 - 6x + 6$ et $R(x) = 2x - 11$

Exercice 6

1. $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{x+1}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. $3x - 7 + \dfrac{7}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$
3. $\dfrac{1}{4(x-1)} - \dfrac{1}{4(x+1)} - \dfrac{1}{2(x^2+1)},$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\}$
4. $x^2 - x - 1 + \dfrac{1}{x+1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
5. $\dfrac{1}{3(x+1)} - \dfrac{x-2}{3(x^2-x+1)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
6. $1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x-1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\}$
7. $\dfrac{1}{4x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{4(x-2)} + \dfrac{1}{2(x-2)^2},$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 2\}$
8. $\dfrac{-1}{10(x-1)} + \dfrac{5}{2(x+1)} - \dfrac{24}{5(2x+3)},$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{3}{2},\ -1,\ 1\}$
9. Cette fraction est simple
10. $\dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{1}{3(x+2)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 1\}$

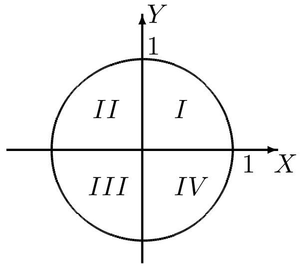
Chapitre 2

Trigonométrie

2.1 Définitions - Formules fondamentales

2.1.1 Cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle centré à l'origine du repère, de rayon 1 et orienté positivement (**sens trigonométrique**) dans le sens inverse des aiguilles d'une montre si les axes sont orientés comme dans la figure ci-dessous.
Les axes du repère divisent le cercle en 4 **quadrants**, numérotés de I à IV comme indiqué dans la figure ci-dessous.



2.1.2 Nombres trigonométriques d'un réel

A. Définitions

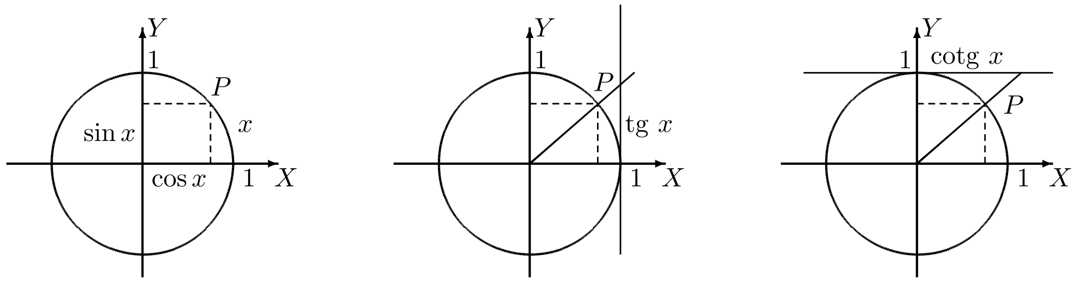
Dans un repère orthonormé, à un réel x on associe l'unique point P du cercle trigonométrique de la façon suivante. A partir du point de coordonnées $(1, 0)$, on parcourt un arc de cercle de longueur $|x|$, dans le sens trigonométrique si $x > 0$, dans le sens inverse si $x < 0$, et on obtient le point P à l'extrémité de l'arc parcouru.
L'abscisse du point P est le **cosinus** du réel x ; on le note $\cos x$.
L'ordonnée du point P est le **sinus** du réel x ; on le note $\sin x$.

A partir de cette définition, on déduit que

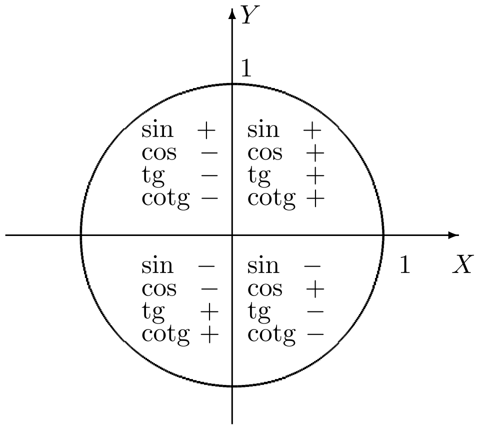
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{et que} \qquad \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

On définit aussi la **tangente** de x, notée tg x, par le rapport $\dfrac{\sin x}{\cos x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
et
la **cotangente** de x, notée cotg x, par le rapport $\dfrac{\cos x}{\sin x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

B. Représentations géométriques



C. Signe des nombres trigonométriques en fonction du quadrant



2.1.3 Formules fondamentales

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

De cette formule, on déduit les formules suivantes

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \text{et} \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} : 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} : 1 + \text{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

De plus, on a aussi $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\} : \text{tg } x = \frac{1}{\text{cotg } x}.$$

2.1.4 Valeurs particulières

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
cotg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2.1.5 Fonctions trigonométriques

A. Définitions

Si au réel x on associe le point du cercle trigonométrique comme indiqué ci-dessus,
- $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$
- $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos x$
- $\text{tg} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \text{tg } x$
- $\text{cotg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \text{cotg } x$

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.
Les fonctions tangente et cotangente sont périodiques de période π.
Les fonctions sinus, tangente et cotangente sont impaires tandis que la fonction cosinus est paire.

B. Variations

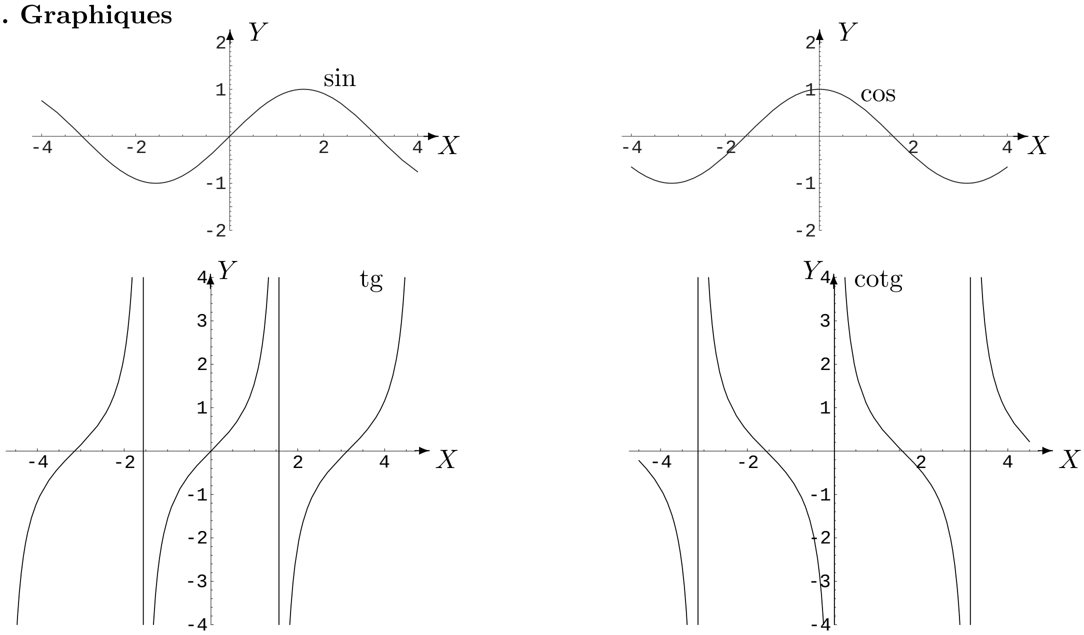
$$\begin{array}{c|ccccccccc} x & 0 & & \frac{\pi}{2} & & \pi & & \frac{3\pi}{2} & & 2\pi \\ \hline \sin x & 0 & \nearrow & 1 & \searrow & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccccc} x & 0 & & \frac{\pi}{2} & & \pi & & \frac{3\pi}{2} & & 2\pi \\ \hline \cos x & 1 & \searrow & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & 0 & \nearrow & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccccc} x & 0 & & \frac{\pi}{2} & & \pi & & \frac{3\pi}{2} & & 2\pi \\ \hline \text{tg } x & 0 & \nearrow & | & \nearrow & 0 & \nearrow & | & \nearrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccccc} x & 0 & & \frac{\pi}{2} & & \pi & & \frac{3\pi}{2} & & 2\pi \\ \hline \text{cotg } x & | & \searrow & 0 & \searrow & | & \searrow & 0 & \searrow & | \end{array}$$

C. Graphiques



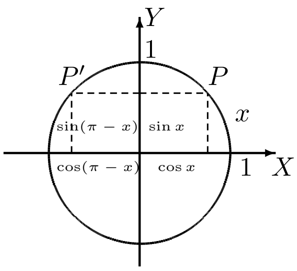
2.2 Formules des “angles associés”

Dans les formules qui suivent, on suppose que les nombres trigonométriques sont définis et que $k \in \mathbb{Z}$.

2.2.1 Angles égaux

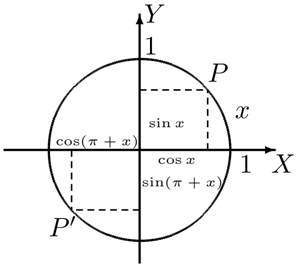
$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(x+2k\pi) = \sin x \\ \cos(x+2k\pi) = \cos x \\ \mathrm{tg}(x+2k\pi) = \mathrm{tg}\ x \\ \mathrm{cotg}(x+2k\pi) = \mathrm{cotg}\ x \end{array}}$$

2.2.2 Angles supplémentaires



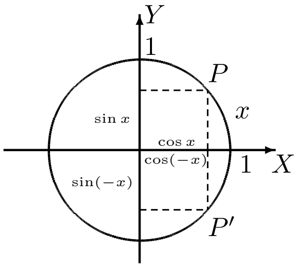
$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \mathrm{tg}(\pi - x) = -\mathrm{tg}\ x \\ \mathrm{cotg}(\pi - x) = -\mathrm{cotg}\ x \end{array}}$$

2.2.3 Angles anti-supplémentaires



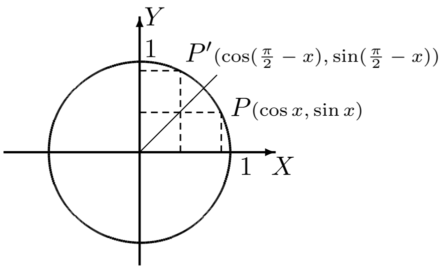
$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\mathrm{tg}(\pi + x) = \mathrm{tg}\ x$
$\mathrm{cotg}(\pi + x) = \mathrm{cotg}\ x$

2.2.4 Angles opposés



$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\ x$
$\mathrm{cotg}(-x) = -\mathrm{cotg}\ x$

2.2.5 Angles complémentaires



$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \mathrm{cotg}\ x$
$\mathrm{cotg}(\frac{\pi}{2} - x) = \mathrm{tg}\ x$

2.3 Formules d'addition et de duplication

2.3.1 Formules d'addition

$\sin(x + y) = \sin x\ \cos y + \sin y\ \cos x$
$\sin(x - y) = \sin x\ \cos y - \sin y\ \cos x$
$\cos(x + y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$
$\cos(x - y) = \cos x\ \cos y + \sin x\ \sin y$

Formules de Simpson

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x + \sin y = 2\ \sin\dfrac{x+y}{2}\ \cos\dfrac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y = 2\ \sin\dfrac{x-y}{2}\ \cos\dfrac{x+y}{2} \\ \cos x + \cos y = 2\ \cos\dfrac{x+y}{2}\ \cos\dfrac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y = -2\ \sin\dfrac{x+y}{2}\ \sin\dfrac{x-y}{2} \end{array}}$$

2.3.2 Formules de duplication

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(2x) = 2\ \sin x\ \cos x \\ \cos(2x) = \cos^2 x\ - \sin^2 x \end{array}}$$

Formules de Carnot

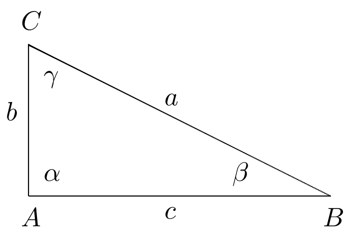
$$\boxed{\begin{array}{l} \sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2} \end{array}}$$

2.4 Relations dans les triangles

On désigne par A, B, C les sommets d'un triangle et par a, b, c les longueurs des côtés opposés respectivement à ces sommets. Enfin, les mesures des angles (orientés positivement) de ce triangle sont respectivement appelées α, β, γ.

2.4.1 Triangle rectangle

Le côté opposé à l'angle droit (ici α) se nomme hypoténuse.
On a les formules suivantes :
$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ avec un des angles égal à $\frac{\pi}{2}$.
$b = a\ \sin\beta = a\ \cos\gamma = c \text{ tg } \beta = c \text{ cotg } \gamma$.
$c = a\ \sin\gamma = a\ \cos\beta = b \text{ tg } \gamma = b \text{ cotg } \beta$.
$a^2 = b^2 + c^2$

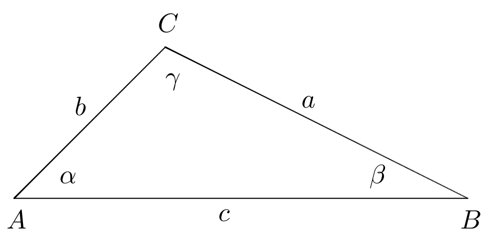


Dans un triangle rectangle, la longueur d'un côté de l'angle droit est égale à
- la longueur de l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé ou le cosinus de l'angle adjacent.
- la longueur de l'autre côté multipliée par la tangente de l'angle opposé ou la cotangente de l'angle adjacent.

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

2.4.2 Triangle quelconque

On a les formules suivantes :
$\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\ \alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\ \beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\ \gamma$
$\dfrac{a}{\sin\ \alpha} = \dfrac{b}{\sin\ \beta} = \dfrac{c}{\sin\ \gamma}$



2.5 Equations trigonométriques

2.5.1 Equations trigonométriques élémentaires

a) En sinus : $\boxed{\sin x = \sin a}$ (a donné)
Les solutions sont données par

$$\boxed{x = a + 2\ k\pi \qquad \text{ou} \qquad x = \pi - a + 2\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Remarques :
1) $\sin x = -\ \sin a \Leftrightarrow \sin x = \sin(-a)$
2) $\sin x = \cos a \Leftrightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$
3) si on a $\sin x = p$ (p réel donné) alors soit $|p| > 1$ et l'équation est impossible puisque $\sin x \in [-1, 1]$, soit $|p| \leq 1$ et on écrit p sous la forme de $\sin a$.

b) En cosinus : $\boxed{\cos x = \cos a}$ (a donné)
Les solutions sont données par

$$\boxed{x = a + 2\ k\pi \qquad \text{ou} \qquad x = -a + 2\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Remarques :
1) $\cos x = -\ \cos a \Leftrightarrow \cos x = \cos(\pi - a)$
2) $\cos x = \sin a \Leftrightarrow \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$
3) si on a $\cos x = p$ (p réel donné) alors soit $|p| > 1$ et l'équation est impossible puisque $\cos x \in [-1, 1]$, soit $|p| \leq 1$ et on écrit p sous la forme de $\cos a$.

c) En tangente : $\boxed{\text{tg } x = \text{tg } a}$ ($a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ donné)
Les solutions (différentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ pour que la tangente existe) sont données par

$$\boxed{x = a + \ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Remarques :
1) $\text{tg } x = -\ \text{tg } a \Leftrightarrow \text{tg } x = \text{tg}(-a)$
2) $\text{tg } x = \text{cotg } a \Leftrightarrow \text{tg } x = \text{tg}(\frac{\pi}{2} - a)$
3) si on a $\text{tg } x = p$ (p réel donné) alors on écrit p sous la forme de $\text{tg } a$.

2.5.2 Equations quelconques

Par application de formules trigonométriques, on cherche à se ramener à une ou plusieurs équations élémentaires équivalentes à l'équation donnée. On veillera à ne travailler qu'avec le même nombre trigonométrique et le même argument pour une même équation à résoudre.
Quant aux formules de Simpson, elles permettent de transformer une somme en un produit de facteurs, ce qui est intéressant si le produit est nul.

Exemples : résoudre
1) $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$ 2) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$ 3) $\cos x + \cos(5x) = \cos(3x) + \cos(7x)$

1) Comme $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, l'équation s'écrit $2 - 2\sin^2 x - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$. Si on pose $y = \sin x$, on a $2y^2 + 3y - 2 = 0$, équation algébrique dont les solutions sont données par ($\Delta = 9 + 16 = 25$) $y = \dfrac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$. Dès lors, comme $\sin x \in [-1, 1]$, on a $\sin x = \frac{1}{2}$ et les solutions de l'équation sont $x = \frac{\pi}{6} + 2\ k\pi$ ou $x = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2\ k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\ k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2\ k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2) Comme $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$, l'équation s'écrit $\cos(2x) = \cos x$. Cette équation a pour solutions $2x = x + 2\ k\pi$ ou $2x = -x + 2\ k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2\ k\pi$ ou $x = \frac{2\ k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Finalement, l'ensemble des

solutions est $\left\{\dfrac{2\ k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3) En appliquant les formules de Simpson dans chacun des membres, on obtient
$2\ \cos\dfrac{x+5x}{2}\ \cos\dfrac{x-5x}{2} = 2\ \cos\dfrac{3x+7x}{2}\ \cos\dfrac{3x-7x}{2} \Leftrightarrow \cos(3x)\ \cos(-2x) - \cos(5x)\ \cos(-2x) = 0.$
La fonction cosinus étant paire, si on met le facteur commun en évidence et qu'on applique à nouveau une formule de Simpson, on a successivement
$\cos(2x)(\cos(3x)-\cos(5x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x)(-2)\sin\dfrac{3x+5x}{2}\ \sin\dfrac{3x-5x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0$ ou $\sin(4x) = 0$ ou $\sin(-x) = 0$. Dès lors, on a $2x = \frac{\pi}{2} +\ k\pi$ ou $4x = k\ \pi$ ou $x = k\ \pi, k \in \mathbb{Z}$ et, en regroupant les solutions, on obtient $\left\{\dfrac{k\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ comme ensemble de solutions.

2.6 Inéquations trigonométriques

On se limitera à la résolution d'inéquations trigonométriques élémentaires qu'on résoudra en s'aidant du cercle trigonométrique.

Exemples : résoudre
1) $2\sin(2x) - \sqrt{3} \leq 0$ 2) $|\cos x| > \frac{1}{2}$ 3) $\sin^2(2x) < \frac{3}{4}$
4) $2\cos^2 x - \cos x - 1 > 0$ 5) $2\cos^2 x - 5\sin x - 2 \geq 0$

1) L'inéquation est équivalente à $\sin(2x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2\ k\ \pi \leq 2x \leq 2\pi + \dfrac{\pi}{3} + 2\ k\ \pi, k \in \mathbb{Z}$ puisqu'on cherche des points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est inférieure à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} +\ k\ \pi,\ \frac{7\pi}{6} +\ k\ \pi\right]$.
2) L'inéquation est équivalente à $\cos x < -\dfrac{1}{2}$ ou $\cos x > \dfrac{1}{2}$. On cherche donc des points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est strictement inférieure à $-\frac{1}{2}$ ou strictement supérieure à $\frac{1}{2}$. Dès lors, l'ensemble des solutions est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{3} +\ k\ \pi,\ \frac{\pi}{3} +\ k\ \pi\right[$.

3) Si on pose $y = \sin(2x)$, l'inéquation s'écrit $y^2 - \dfrac{3}{4} < 0$ et a pour solutions $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < y < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, on a $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \sin(2x) < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{3} + k\ \pi < 2x < \dfrac{\pi}{3} + k\ \pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et l'ensemble des solutions est

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{6} +\ k\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6} +\ k\ \frac{\pi}{2}\right[.$$

4) Si on pose $y = \cos x$, l'inéquation s'écrit $2y^2 - y - 1 > 0 \Leftrightarrow (2y+1)(y-1) > 0 \Leftrightarrow y < -\frac{1}{2}$ ou $y > 1$. Comme $\cos x \in [-1, 1]$, on a donc $\cos x < -\frac{1}{2}$ et l'ensemble des solutions est donné par

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{2\pi}{3} + 2\ k\ \pi,\ \frac{4\pi}{3} + 2\ k\ \pi\right[.$$

5) En remplaçant $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$, l'inéquation devient $-2\sin^2 x - 5\sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x + 5) \leq 0$ $\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq \sin x \leq 0$. La première inégalité étant toujours vérifiée puisque $\sin x \in [-1, 1]$, il suffit de chercher les valeurs de x qui vérifient la seconde. Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\pi + 2\ k\pi,\ 2\pi + 2\ k\pi] = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [(2\ k+1)\pi,\ (2\ k+2)\pi].$$

2.7 Quelques exercices à résoudre . . . et leurs solutions

2.7.1 Exercices

1. Si au réel x on associe un point du cercle trigonométrique situé dans le second quadrant et si $\sin x = \frac{5}{13}$, calculer $\cos x$, $\mathrm{tg}\ x$ et $\mathrm{cotg}\ x$.

2. On donne $\mathrm{tg}\ x = -\frac{3}{4}$ avec $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. Calculer $\sin x$, $\cos x$ et $\mathrm{cotg}\ x$.

3. Démontrer que les expressions suivantes, supposées définies, sont indépendantes de x
   1) $\mathrm{tg}\ x + \mathrm{cotg}\ x - \dfrac{1}{\sin x \cos x}$ 2) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$ 3) $\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$.

4. Exprimer
   1. $\mathrm{tg}(x+y)$ en fonction de $\mathrm{tg}\ x$ et $\mathrm{tg}\ y$
   2. $\mathrm{cotg}(x-y)$ en fonction de $\mathrm{cotg}\ x$ et $\mathrm{cotg}\ y$
   3. $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$
   4. $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$
   5. $\mathrm{tg}(3x)$ en fonction de $\mathrm{tg}\ x$

5. Démontrer les identités suivantes supposées définies
   1. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$
   2. $\mathrm{tg}\ x - \mathrm{tg}\ y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$
   3. $\sin(2x) - \mathrm{tg}\ x \cos(2x) = \mathrm{tg}\ x$
   4. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$
   5. $\sin(5x)\ \sin x = \sin^2(3x) - \sin^2(2x)$
   6. $\dfrac{\sin x + \sin(2x) + \sin(3x)}{\cos x + \cos(2x) + \cos(3x)} = \mathrm{tg}(2x)$
   7. $\sin x \sin(y-z) + \sin y \sin(z-x) + \sin z \sin(x-y) = 0$
   8. $\cos^2(x+y) - \sin^2(x-y) = \cos(2x)\ \cos(2y)$
   9. $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \dfrac{\mathrm{tg}\ x + 1}{\mathrm{tg}\ x - 1} = \dfrac{1 + \mathrm{cotg}\ x}{1 - \mathrm{cotg}\ x} = \dfrac{1 + 2\ \sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$
   10. $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 4 \sin \dfrac{5x}{2} \cos x \cos \dfrac{x}{2}$

6. Démontrer les égalités suivantes
   1. $4\ \sin \dfrac{7\pi}{24}\ \sin \dfrac{11\pi}{24} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$
   2. $\sin \dfrac{11\pi}{12}\ \cos \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{1}{4}(2 - \sqrt{3})$

7. Résoudre les équations suivantes (x est l'inconnue réelle)
   1. $2\ \cos(2x) + \sqrt{3} = 0$
   2. $\mathrm{tg}(3x) + 1 = 0$
   3. $\sin(2x) + \sin x = 0$
   4. $\mathrm{tg}(3x) = \mathrm{cotg}\ x$
   5. $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -1$
   6. $\sin(2x) = -\cos(2x)$
   7. $\mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{tg}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
   8. $2\ \sin x + 3\ \mathrm{cotg}\ x = 0$
   9. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$
   10. $2\ \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
   11. $3\ \cos^2 x - 5 \cos x - 2 = 0$
   12. $\mathrm{tg}^2 x + (1 + \sqrt{3})\ \mathrm{tg}\ x + \sqrt{3} = 0$
   13. $\sin(2x) + \sin(4x) = \sin(3x)$
   14. $\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = 3$
   15. $\mathrm{tg}\ x\ \mathrm{cotg}(2x) = \mathrm{tg}(2x)\ \mathrm{cotg}\ x$
   16. $\sin^2(5x) - \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$
   17. $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 0$
   18. $\sin x + \sin(3x) = \sqrt{3}\ \cos x$

8. Résoudre les inéquations suivantes (x est l'inconnue réelle)
   1. $2\ \sin(3x) + \sqrt{3} < 0$
   2. $\mathrm{tg}(4x) + 1 \geq 0$
   3. $|\sin(2x)| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   4. $\cos(2x) > \sin x$
   5. $\sin^2(2x) \leq \cos^2(2x)$
   6. $\cos x + \cos(3x) \geq 0$

9. Un cycliste roule sur une route horizontale en direction d'une montagne à une vitesse de 30 km/h. Il remarque qu'entre 15 h et 15 h 10 l'angle d'élévation du sommet de la montagne passe de 30° à 60°. Si la distance des yeux du cycliste au sol est supposée négligeable, quelle est la hauteur de la montagne ?

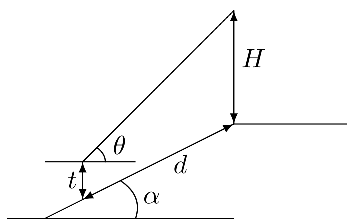
10. Pour mesurer l'altitude d'une couverture nuageuse, un météorologiste dirige, verticalement vers le haut à partir du sol, un projecteur à faisceau concentré. D'un point P au sol situé à 1 000 m du projecteur, on mesure l'angle d'élévation θ de la tache lumineuse sur les nuages. Déterminer l'altitude à laquelle se trouve les nuages si $\theta = 60°$, le sol étant horizontal.

11. A Washington, le Pentagone est un bâtiment dont la base a la forme d'un pentagone régulier dont chaque côté mesure 276 m. Déterminer l'aire de la base du bâtiment.

12. On veut construire un tunnel rectiligne au travers d'une montagne, l'entrée se trouvant au point A et la sortie au point B. D'un point C extérieur à la montagne, on peut voir les deux points A et B et mesurer les distances AC et BC. Déterminer la longueur du tunnel à creuser si AC mesure 380 m, BC 555 m et si l'angle en C formé par AC et CB vaut 35°.

13. Deux observateurs situés au sol dans une plaine, l'un au point A et l'autre au point B, sont séparés par une distance de 2 875 m. Ils observent un avion se déplaçant dans le ciel à la verticale de la droite AB entre A et B. Si l'angle d'élévation mesuré par A est de 62° et celui mesuré par B de 50°, déterminer la distance entre A et l'avion ainsi que l'altitude à laquelle se trouve l'avion.

14. Un observateur de taille t se tient sur le flanc d'une colline à une distance d de la base d'un bâtiment de hauteur H. L'angle d'élévation de l'oeil de l'observateur au sommet du bâtiment est égal à θ et la colline fait un angle de α degrés avec l'horizontale. Exprimer H en fonction de t, d, α et θ. On supposera que la distance entre les yeux et le haut de la tête de l'observateur est négligeable.



2.7.2 Solutions

Exercice 1 : $\cos x = -\dfrac{12}{13}$ $\quad$ $\text{tg } x = -\dfrac{5}{12}$ $\quad$ $\text{cotg } x = -\dfrac{12}{5}$

Exercice 2 : $\sin x = -\dfrac{3}{5}$ $\quad$ $\cos x = \dfrac{4}{5}$ $\quad$ $\text{cotg } x = -\dfrac{4}{3}$

Exercice 3 : les expressions sont respectivement égales à 0, 2 et 1.

Exercice 4 :

1. $\text{tg}(x+y) = \dfrac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x \text{ tg } y}$
2. $\text{cotg}(x-y) = \dfrac{\text{cotg } x \text{ cotg } y + 1}{\text{cotg } y - \text{cotg } x}$
3. $\sin(3x) = 3\ \sin x - 4\ \sin^3 x$
4. $8\ \cos^4 x - 8\ \cos^2 x + 1$
5. $\dfrac{3\ \text{tg } x - \text{tg}^3 x}{1 - 3\ \text{tg}^2 x}$

Exercice 5 : –

Exercice 6 : –

Exercice 7

1. $S = \left\{ \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
2. $S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$
3. $S = \left\{ k\frac{2\pi}{3}, \pi + 2\ k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
4. $S = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z} \right\}$
5. $S = \left\{ \frac{7\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
6. $S = \left\{ \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$
7. $S = \left\{ -\frac{3\pi}{4} +\ k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
8. $S = \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2\ k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
9. $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$
10. $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\ k\pi, \frac{\pi}{6} + 2\ k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2\ k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
11. $S = \{ \pm 1,9106 + 2\ k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$
12. $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
13. $S = \left\{ k\frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$
14. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\ k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2\ k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
15. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
16. $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{6} : k \in \mathbb{Z} \right\}$
17. $S = \left\{ k\frac{\pi}{2}, k\frac{2\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$
18. $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercice 8

1. $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{4\pi}{9} + \frac{2\ k\pi}{3}, \frac{5\pi}{9} + \frac{2\ k\pi}{3} \right[$
2. $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \right[$
3. $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right]$
4. $S = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{5\pi}{6} + 2\ k\pi, \frac{13\pi}{6} + 2\ k\pi \right[\right) \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2\ k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
5. $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right]$
6. $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{4} + 2\ k\pi, \frac{\pi}{4} + 2\ k\pi \right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\ k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2\ k\pi \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4} + 2\ k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2\ k\pi \right] \right)$

Exercice 9 : $2\ 500\ \sqrt{3}$ m

Exercice 10 : $1\ 000\ \sqrt{3}$ m

Exercice 11 : 131 059 m^2

Exercice 12 : 326,96... $\approx$ 327 m

Exercice 13 : distance entre A et l'avion = 2 375,34... $\approx$ 2 375 m ; altitude = 2 097, 30... $\approx$ 2 097 m

Exercice 14 : $H = t + d(\cos(\alpha)\mathrm{tg}(\theta) - \sin(\alpha))$

Chapitre 3

Géométrie vectorielle et analytique

3.1 Vecteur - Base - Composantes

3.1.1 Définitions

Etant donné deux points P et Q de l'espace, le segment orienté d'origine P et d'extrémité Q est appelé **vecteur lié** et noté $\overrightarrow{PQ}$.
Si P et Q sont deux points confondus, ils définissent le **vecteur nul** noté $\vec{0}$.
La droite PQ est le **support** du vecteur.
La longueur du segment PQ est la **longueur** ou **norme** du vecteur, notée $||\overrightarrow{PQ}||$.
Le **sens** du vecteur est donné par le sens de parcours du segment PQ, de l'origine vers l'extrémité.

On appelle **vecteur libre** l'ensemble des vecteurs liés obtenus par translation d'un vecteur lié non nul ; il est noté par une lettre minuscule surmontée d'une flèche.
Le **vecteur libre nul** est l'ensemble de tous les vecteurs liés nuls.

3.1.2 Opérations entre vecteurs

A. Multiplication d'un vecteur par un réel

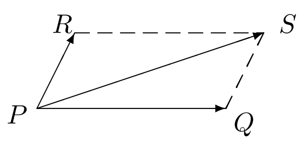
Soient r un réel non nul et $\overrightarrow{PQ}$ un vecteur non nul.
Le vecteur $\overrightarrow{PS} = r\overrightarrow{PQ}$ est le vecteur lié en P qui a
- même support que $\overrightarrow{PQ}$
- comme longueur celle de $\overrightarrow{PQ}$ multipliée par $|r|$
- le même sens que $\overrightarrow{PQ}$ si $r > 0$ et le sens opposé si $r < 0$.

Si $r = 0$ ou si $\overrightarrow{PQ}$ est le vecteur nul alors $\overrightarrow{PS}$ est le vecteur nul.

Deux **vecteurs** sont **parallèles** si l'un est multiple de l'autre.

B. Somme de deux vecteurs

• Vecteurs liés en un même point mais non parallèles
Règle du parallélogramme : $\overrightarrow{PQ}+ \overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PS}$.



Si les vecteurs sont libres, on fait coïncider l'origine du second avec l'extrémité du premier ; le vecteur somme a alors pour origine l'origine du premier vecteur et pour extrémité celle du second.

Ainsi, $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}$.

• **Vecteurs liés en un même point et parallèles**
- Vecteurs de **même sens** : le vecteur somme a même support et même sens que les vecteurs à additionner ; sa norme est égale à la somme des normes de ceux-ci.
- Vecteurs de **sens opposés** : le vecteur somme a
a) même support que les vecteurs à additionner
b) le sens de celui qui a la plus grande norme
c) comme norme la différence entre les normes de ceux-ci.

Dans le cas de vecteurs libres, on utilise la règle donnée précédemment pour les vecteurs libres.

C. Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs libres non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel $\vec{u} \bullet \vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}|| \cos(\theta)$ où $\theta \in [0, \pi]$ est la mesure de l'angle non orienté entre les deux vecteurs.
Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.

Deux **vecteurs** sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul.

Remarque : le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est nul si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3.1.3 Base et composantes d'un vecteur

A. Dans un plan

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non parallèles d'un plan forment une **base** de ce plan.

Tout vecteur $\vec{x}$ de ce plan se décompose de façon unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs.
Si $\vec{x} = r\ \vec{u} + s\ \vec{v}$ alors les réels $r,\ s$ sont les **composantes** de $\vec{x}$ dans la base $\vec{u},\ \vec{v}$.

B. Dans l'espace

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires forment une **base** de l'espace.

Tout vecteur $\vec{x}$ de l'espace se décompose de façon unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs.
Si $\vec{x} = r\ \vec{u} + s\ \vec{v} + t\ \vec{w}$ alors les réels $r,\ s,\ t$ sont les **composantes** de $\vec{x}$ dans la base $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$.

C. Base orthonormée

Une base est orthonormée si les vecteurs qui la composent sont de norme 1 et orthogonaux 2 à 2.
Ainsi, $\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}$ forment une base orthonormée de l'espace si

$$||\vec{e_1}|| = ||\vec{e_2}|| = ||\vec{e_3}|| = 1 \text{ et si } \vec{e_1} \bullet \vec{e_2} = \vec{e_1} \bullet \vec{e_3} = \vec{e_2} \bullet \vec{e_3} = 0.$$

3.1.4 Opérations entre vecteurs et composantes

Si, dans une base de l'espace, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont respectivement comme composantes (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) alors les composantes de
• $r\ \vec{a}$ $(r \in \mathbb{R})$ sont données par (ra_1, ra_2, ra_3)
• $\vec{a} + \vec{b}$ sont données par $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

Si, dans une base orthonormée de l'espace, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont respectivement comme composantes (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) alors $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

3.2 Repère - Coordonnées cartésiennes

3.2.1 Définitions

Une base du plan (de l'espace) et un point O constituent un **repère** du plan (de l'espace) ; le point O est l'**origine** du repère. Les droites passant par l'origine et dont les directions sont celles des vecteurs de base sont appelées **axes** du repère.
Dans ce repère, on appelle **coordonnées cartésiennes d'un point** P les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$. La première composante est l'**abscisse** de P, la deuxième en est l'**ordonnée** et la troisième la **cote**.[1]

3.2.2 Composantes d'un vecteur à partir des coordonnées de 2 points

Si, dans un repère, les points P et Q ont respectivement pour coordonnées (x_P, y_P, z_P) et (x_Q, y_Q, z_Q) alors les composantes du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ sont données par $(x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P)$.

3.2.3 Distance entre deux points

Si, dans un repère orthonormé, les points P et Q ont respectivement pour coordonnées (x_P, y_P, z_P) et (x_Q, y_Q, z_Q) alors la distance entre P et Q est donnée par

$$\mathrm{dist}(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}.$$

3.2.4 Coordonnées du milieu d'un segment

Si, dans un repère, les points P et Q ont respectivement pour coordonnées (x_P, y_P, z_P) et (x_Q, y_Q, z_Q) alors le milieu M du segment PQ a pour coordonnées $M(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}, \frac{z_P + z_Q}{2})$

3.3 La droite dans le plan

3.3.1 Définition vectorielle d'une droite

Soient un point P_0 et un vecteur libre non nul $\vec{v}$.
La droite d passant par P_0 et de vecteur directeur $\vec{v}$ est l'ensemble des points P pour lesquels il existe un réel r tel que $\overrightarrow{P_0P} = r\ \vec{v}$.

Remarques

1. Tout multiple non nul de $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de d.
2. Si P_0 et P_1 sont deux points distincts alors le vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ est un vecteur directeur de d et on peut définir cette droite comme l'ensemble des points P pour lesquels il existe un réel r tel que $\overrightarrow{P_0P} = r\ \overrightarrow{P_0P_1}$.
   Si $r < 0$ alors les points P définis se trouvent "avant" P_0 ; si $r \in [0, 1]$ alors les points P sont ceux du segment P_0P_1. Enfin, si $r > 1$, les points P se trouvent "après" P_1.

[1]Dans le plan, les points n'ont que deux coordonnées, une abscisse et une ordonnée.

3.3.2 Equation cartésienne d'une droite

Si on fixe un repère du plan, toute droite a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et a, b non simultanément nuls. Inversement, toute équation de ce type est l'équation cartésienne d'une droite.

Cas particuliers

1. Droite parallèle à l'axe des abscisses : $y = b$ $(b \in \mathbb{R})$
2. Droite parallèle à l'axe des ordonnées : $x = a$ $(a \in \mathbb{R})$
3. Droite non parallèle à l'axe des ordonnées : $y = mx + p$ $(m, p \in \mathbb{R})$ où m est le coefficient angulaire de la droite.
4. Droite passant par P_0 de coordonnées (x_0, y_0) et de coefficient angulaire m : $y - y_0 = m(x - x_0)$.

3.3.3 Appartenance d'un point à une droite

Dans un repère du plan, le point P_0 de coordonnées (x_0, y_0) est un point de la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ si ses coordonnées vérifient l'équation de d c'est-à- dire si $ax_0 + by_0 + c = 0$.
Inversement, si on cherche les coordonnées d'un point P_0 de la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, il suffit de choisir arbitrairement une valeur x_0 (resp. y_0) et de déterminer y_0 (resp. x_0) pour avoir $ax_0 + by_0 + c = 0$.

3.3.4 Distance d'un point à une droite

Dans un repère orthonormé, la distance du point P_0 de coordonnées (x_0, y_0) à la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ est donnée par

$$\operatorname{dist}(P_0, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

3.3.5 Lien entre vecteur directeur et coefficient angulaire d'une droite

• Si $\vec{v}$, vecteur directeur de d, a pour composantes (v_1, v_2) alors le coefficient angulaire de d vaut

$$m = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{si} \quad v_1 \neq 0.$$

• Si $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$ a pour composantes $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ alors le coefficient angulaire de d vaut

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{si} \quad x_1 \neq x_0.$$

3.4 Positions relatives de deux droites

3.4.1 Intersection

De façon générale, déterminer l'intersection de 2 courbes données par leurs équations cartésiennes consiste à résoudre le système formé par leurs équations. Dès lors, l'intersection de deux droites est donnée par la résolution d'un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues.
Trois cas peuvent se présenter :

1. le système admet une seule solution : les 2 droites sont sécantes
2. le système n'admet pas de solution : les 2 droites sont parallèles et distinctes

3. le système admet une infinité de solutions (système simplement indéterminé) : les 2 droites sont parallèles et confondues.

3.4.2 Droites parallèles

Deux droites sont parallèles si elles sont déterminées par un même vecteur directeur ; leurs coefficients angulaires (s'ils existent) sont égaux.

Si d_1 et d_2 ont respectivement comme équation cartésienne $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ avec $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ et $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$ alors d_1 est parallèle à d_2 si et seulement si $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ (avec la convention qu'à un dénominateur nul correspond un numérateur nul).

3.4.3 Droites orthogonales (ou perpendiculaires)

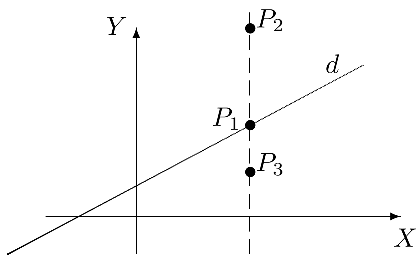
Dans un repère orthonormé, deux droites sont orthogonales si le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

Dans un repère orthonormé du plan, deux droites non parallèles aux axes sont orthogonales si le produit de leurs coefficients angulaires vaut -1.

Si d a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ alors toute droite orthogonale à d a pour vecteur directeur un vecteur de composantes (a, b).

3.5 Régions du plan par rapport à une droite

Soit une droite d d'équation cartésienne $y = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$.
Considérons 3 points du plan de même abscisse, P_1 situé sur d, P_2 et P_3 situés de part et d'autre de d (cf. graphique).
Dès lors, l'ordonnée de P_1 vaut $mx + p$, celle de P_2 est supérieure à $mx + p$ tandis que celle de P_3 est inférieure à $mx + p$. Il en va de même quelle que soit l'abscisse considérée.



Ainsi, tous les points situés "au-dessus" de d sont ceux de l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - mx - p > 0\}$ et ceux situés "en dessous" de d sont ceux de l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - mx - p < 0\}$.

3.6 Les coniques

3.6.1 Le cercle

Soient un point P_0 du plan et un réel r strictement positif.
Le **cercle** $\mathcal{C}$ de centre P_0 et de rayon r est le lieu des points du plan dont la distance à P_0 vaut r.
On a donc $$P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \text{dist}(P, P_0) = r.$$

Dans un repère orthonormé, si P_0 et P ont respectivement pour coordonnées (x_0, y_0) et (x, y) alors $\mathcal{C}$ a pour **équation cartésienne** $\quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$

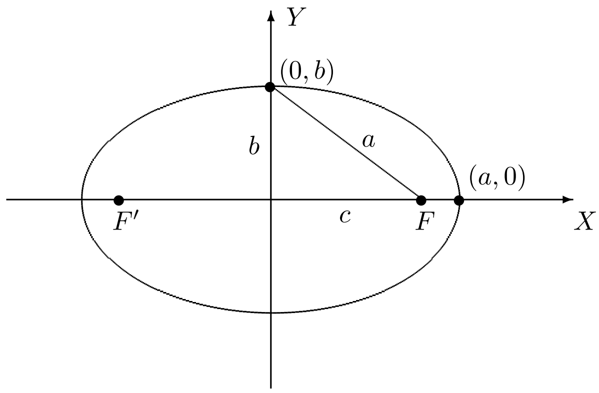
Remarque : si le cercle est centré à l'origine du repère, son équation cartésienne est $x^2 + y^2 = r^2$.

3.6.2 L'ellipse

Soient F et F' deux points distincts du plan, appelés foyers, et $2a$ un réel strictement plus grand que la distance entre F et F'.
L'**ellipse** $\mathcal{E}$ définie par ces données est le lieu des points du plan dont la somme des distances à F et F' vaut $2a$.
On a donc $$P \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \text{dist}(P,F) + \text{dist}(P,F') = 2a.$$

Considérons un repère orthonormé dont l'axe des abscisses passe par les foyers et dont l'axe des ordonnées passe par le milieu du segment défini par les foyers. Dans ce repère, F, F' et P ont respectivement pour coordonnées $(c,0)$, $(-c,0)$ et (x,y) avec $c > 0$ et $\mathcal{E}$ a pour **équation cartésienne**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{avec} \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$



Remarque : si on place les foyers sur l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses passant par le milieu du segment FF' alors $\mathcal{E}$ a pour équation cartésienne

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{avec} \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

L'**excentricité** e d'une ellipse est donnée par $e = \dfrac{c}{a}$, rapport de la distance entre les foyers à la distance entre les points d'intersection de l'ellipse avec la droite passant par les foyers. C'est un réel strictement compris entre 0 et 1 puisque $\text{dist}(F,F') = 2c < 2a$.

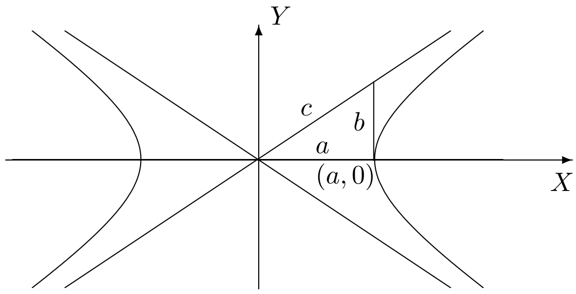
3.6.3 L'hyperbole

Soient F et F' deux points distincts du plan, appelés foyers, et $2a$ un réel strictement positif strictement plus petit que la distance entre F et F'.
L'**hyperbole** $\mathcal{H}$ définie par ces données est le lieu des points du plan dont la valeur absolue de la différence entre les distances à F et F' vaut $2a$.
On a donc $$P \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |\text{dist}(P,F) - \text{dist}(P,F')| = 2a.$$

Considérons un repère orthonormé dont l'axe des abscisses passe par les foyers et dont l'axe des ordonnées passe par le milieu du segment défini par les foyers. Dans ce repère, F, F' et P ont respectivement pour coordonnées $(c,0)$, $(-c,0)$ et (x,y) avec $c > 0$ et $\mathcal{H}$ a pour **équation cartésienne**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{avec} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Les droites d'équation $y = \dfrac{b}{a}\, x$ et $y = -\dfrac{b}{a}\, x$ sont les **asymptotes** de l'hyperbole.



Remarque : si on place les foyers sur l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses passant par le milieu du segment FF' alors $\mathcal{H}$ a pour équation cartésienne

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1 \qquad \text{avec} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

et dans ce cas, les asymptotes ont pour équation $y = \dfrac{a}{b}\,x$ et $y = -\dfrac{a}{b}\,x$.

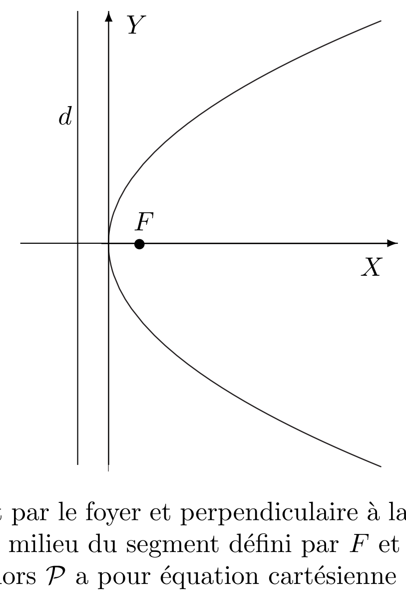
L'**excentricité** e d'une hyperbole est donnée par $e = \dfrac{c}{a}$, rapport de la distance entre les foyers à la distance entre les points d'intersection de l'hyperbole avec la droite passant par les foyers. C'est un réel strictement supérieur à 1 puisque $\mathrm{dist}(F, F') = 2c > 2a$.

3.6.4 La parabole

Dans le plan, considérons une droite d, appelée directrice, et un point F appelé foyer, n'appartenant pas à d. La **parabole** $\mathcal{P}$ définie par ces données est le lieu des points du plan dont la distance à F est égale à la distance à d.
On a donc $$P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathrm{dist}(P, F) = \mathrm{dist}(P, d).$$

Considérons un repère orthonormé dont l'axe des abscisses est la perpendiculaire à d passant par F et dont l'axe des ordonnées passe par le milieu du segment défini par F et par le point d'intersection de l'axe des abscisses et de la directrice. Dans ce repère, F et P ont respectivement pour coordonnées $(c, 0)$ et (x, y) avec $c > 0$, d a pour équation $x = -c$ et $\mathcal{P}$ a pour **équation cartésienne**

$$y^2 = 4cx.$$



Remarque : si la droite passant par le foyer et perpendiculaire à la directrice est l'axe des ordonnées et si l'axe des abscisses passe par le milieu du segment défini par F et par le point d'intersection de l'axe des ordonnées et de la directrice alors $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x^2 = 4cy$.

L'**excentricité** e d'une parabole vaut 1.

3.7 Quelques exercices à résoudre ... et leurs solutions

3.7.1 Exercices

1. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite a d'équation $2x - y + 3 = 0$, la droite b d'équation $x + y = 0$ ainsi que leur point commun P. Déterminer une équation cartésienne de la droite d si
   (a) d passe par P et par le point C de coordonnées $(2, 1)$
   (b) d passe par P et est parallèle à la droite d_2 d'équation $2x - 3y = 0$
   (c) d passe par P et a pour coefficient angulaire $-\dfrac{2}{5}$
   (d) d passe par P et est parallèle à la droite d_3 d'équation $x - 3 = 0$
   (e) d passe par P et est parallèle à la droite d_4 d'équation $2y + 1 = 0$
   (f) d passe par P et est parallèle à la droite d_5 d'équation $4x - 2y + 1 = 0$
   (g) d passe par P et est perpendiculaire à la droite d_6 d'équation $3y - x + \sqrt{2} = 0$
   (h) d passe par P et est perpendiculaire à la droite d_7 d'équation $x = y$
2. Dans un repère du plan, on considère les points A, B, C dont les coordonnées sont respectivement
   (a) $(-1, -6)$, $(5, 6)$ et $(3, 2)$
   (b) $(0, 2)$, $(5, 0)$ et $(-10, 2)$
   Ces points sont-ils alignés ? Justifier.
3. Dans un repère orthonormé du plan, les sommets A, B et C d'un triangle ont respectivement pour coordonnées $(3, 2)$, $(5, 6)$ et $(7, 0)$.
   (a) Ecrire les équations cartésiennes des côtés, des médianes, des hauteurs de ce triangle ainsi que celle de la droite d passant par A et parallèle à BC.
   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des médianes de ce triangle.
   (c) Calculer la longueur des côtés. De quel type de triangle s'agit-il ?
4. Dans un repère du plan, les sommets A, B, C et D d'un quadrilatère ont respectivement pour coordonnées $(3, 2)$, $(-5, 4)$, $(-3, -4)$ et $(2, -3)$. On note P le point commun aux droites AB et CD et Q le point commun aux droites AD et BC. Démontrer que les droites AC et PQ sont parallèles et que BD passe par le milieu M du segment PQ.
5. Dans un repère du plan, on considère la droite a d'équation $2x - 3y + 6 = 0$ et la droite b d'équation $3x + 2y - 6 = 0$ sécantes au point S.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de SP si P a pour coordonnées $(1, 3)$
   (b) Déterminer une équation cartésienne de SM si M est le milieu du segment déterminé par les points d'intersection de a et de b avec l'axe des abscisses.
6. Soient A un point de coordonnées $(-1, -2)$ et d une droite d'équation $2x + 3y = 0$ dans un repère orthonormé du plan. La droite comprenant A et parallèle à d coupe l'axe des abscisses en B. La droite comprenant A et perpendiculaire à d coupe l'axe des ordonnées en D. Déterminer les coordonnées des sommets du rectangle $ABCD$.
7. Soit le triangle ABC dont les sommets ont respectivement pour coordonnées $(6, 4)$, $(2, -2)$ et $(-4, 2)$ dans un repère orthonormé du plan.
   (a) Donner les équations cartésiennes des médiatrices des côtés du triangle ABC.
   (b) Vérifier que ces médiatrices sont concourantes en un point M dont on calculera les coordonnées.
   (c) Vérifier que M est situé à égale distance des points A, B et C.
   (d) Déterminer la distance du point M à la droite AB.
8. Dans un repère orthonormé d'un plan, on considère les droites a d'équation $x - 2y - 1 = 0$, b d'équation $7x + y + 8 = 0$ et c d'équation $x + y - 4 = 0$ qui déterminent un triangle.
   (a) Déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle.

   (b) Déterminer le centre de gravité[2], l'orthocentre[3] et le centre du cercle circonscrit au triangle.[4]
9. Dans un repère orthonormé, déterminer le réel k pour que le cercle d'équation $x^2+y^2-2x+4y+k=0$
   (a) passe par le point de coordonnées $(4,3)$
   (b) ait 4 comme rayon.
10. Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du cercle
    (a) qui passe par le point de coordonnées $(-2,-2)$ et dont le centre a pour coordonnées $(1,2)$
    (b) qui est tangent à la droite d'équation $4x-3y-2=0$ et dont le centre a pour coordonnées $(2,-3)$
    (c) de diamètre AB si les points A et B ont respectivement pour coordonnées $(-1,3)$ et $(2,-1)$.
11. Déterminer, si elles existent, les coordonnées des points communs au cercle et à la droite dont on donne les équations cartésiennes dans un repère orthonormé
    (a) $x^2+y^2=65$ et $3x+y-25=0$
    (b) $x^2+y^2-4x+6y+9=0$ et $5x+12y=0$
    Dans chacun des cas, la droite est-elle sécante, tangente ou non sécante au cercle ?
12. Dans un repère orthonormé, on considère les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dont les équations cartésiennes sont respectivement $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ et $x^2+y^2+10x-6y+25=0$. Ces cercles sont-ils sécants ? Justifier.
13. Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne de l'ellipse dont les foyers se trouvent sur l'un des axes du repère symétriquement par rapport à l'origine de ce repère
    (a) et qui passe par les points de coordonnées $(3,0)$ et $(0,5)$. Quelles sont alors les coordonnées des foyers ?
    (b) qui passe par le point de coordonnées $(0,-13)$ et dont un foyer a pour coordonnées $(0,5)$. Quelle est l'excentricité de cette ellipse ?
    (c) qui passe par le point de coordonnées $(-12,0)$ et dont un foyer a pour coordonnées $(0,-5)$. Quelle est l'excentricité de cette ellipse ?
14. Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne de l'hyperbole dont les foyers se trouvent sur l'un des axes du repère symétriquement par rapport à l'origine de ce repère
    (a) qui passe par le point de coordonnées $(3,0)$ et dont une asymptote a pour équation $2x-y=0$. Quelle est l'excentricité de cette hyperbole ?
    (b) qui passe par le point de coordonnées $(0,5)$ et dont un foyer a pour coordonnées $(0,-13)$. Quelles sont les équations des asymptotes de cette hyperbole ?
    (c) dont un foyer a pour coordonnées $(13,0)$ et dont une asymptote a pour équation $12x+5y=0$. Quelle est l'excentricité de cette hyperbole ?
15. Dans un repère orthonormé, on considère la parabole d'équation $y^2=kx$. Déterminer le réel k pour que la parabole
    (a) passe par le point de coordonnées $(4,2)$
    (b) admette comme foyer le point de coordonnées $(3,0)$.
16. Dans un repère orthonormé, on considère la parabole d'équation $y^2=2x$ et la droite d'équation $x+y+4=0$. Déterminer, si elles existent, les coordonnées des points d'intersection de la droite et de la parabole.
17. Dans un repère orthonormé, on considère les paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ dont les équations cartésiennes sont respectivement $y^2+4x=0$ et $x^2=\sqrt{2}y$. Déterminer le foyer de chacune de ces paraboles et les coordonnées de leurs éventuels points communs.
18. Dans un repère orthonormé, construire la courbe dont une équation cartésienne est

1) $y^2=4x$	6) $9x^2-16y^2-144=0$
2) $4x^2+9y^2=36$	7) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$
3) $x^2+2y^2=0$	8) $4x^2=25y^2$
4) $3x^2-2y=1$	9) $16y^2-9x^2=144$
5) $x^2+y^2-9=0$	10) $16x^2+25y^2=100$

[2]Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection de ses médianes.
[3]L'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection de ses hauteurs.
[4]Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection des médiatrices de ses côtés.

19. Pour chacune des coniques dont les équations sont données dans l'exercice ci-dessus, déterminer
    (a) les coordonnées du centre et le rayon pour les cercles
    (b) les coordonnées du (des) foyer(s) pour les ellipses, hyperboles et paraboles
    (c) une équation des asymptotes pour les hyperboles
    (d) une équation de la directrice pour les paraboles.

3.7.2 Solutions

1. (a) $y - 1 = 0$
   (b) $2x - 3y + 5 = 0$
   (c) $2x + 5y - 3 = 0$
   (d) $x + 1 = 0$
   (e) $y - 1 = 0$
   (f) $2x - y + 3 = 0$
   (g) $3x + y + 2 = 0$
   (h) $x + y = 0$

2. (a) Oui (b) Non

3.

(a)	Côtés	$AB : 2x - y - 4 = 0$	$BC : 3x + y - 21 = 0$	$AC : x + 2y - 7 = 0$
	Médianes	$m_A : x - 3y + 3 = 0$	$m_B : x - 5 = 0$	$m_C : 4x + 3y - 28 = 0$
	Hauteurs	$h_A : x - 3y + 3 = 0$	$h_B : 2x - y - 4 = 0$	$h_C : x + 2y - 7 = 0$
		$d : 3x + y - 11 = 0$		
(b)	Coordonnées	$(5, \frac{8}{3})$		
(c)	Long. des côtés	$\vert AB\vert = 2\sqrt{5}$	$\vert AC\vert = 2\sqrt{5}$	$\vert BC\vert = 2\sqrt{10}$

   Le triangle est isocèle de sommet A.

4. Les points P et Q ont respectivement pour coordonnées $(\dfrac{41}{3}, -\dfrac{2}{3})$ et $(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{44}{3})$
   Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{PQ}$ ont respectivement pour composantes $(-6, -6)$ et $(-14, -14)$. Comme ils sont multiples l'un de l'autre, les deux droites sont parallèles.
   Les coordonnées de M $(\frac{20}{3}, -\frac{23}{3})$ vérifient l'équation de $BD : x + y + 1 = 0$.

5. (a) $SP : 9x - 7y + 12 = 0$ (b) Coord. de $M(-\frac{1}{2}, 0)$ et $SM : 12x - 5y + 6 = 0$

6. Les coordonnés des sommets sont $A(-1, -2)$, $B(-4, 0)$, $C(-3, \frac{3}{2})$ et $D(0, -\frac{1}{2})$.

7. (a) Médiatrices : $m_{AB} : 2x + 3y - 11 = 0$, $m_{AC} : 5x + y - 8 = 0$, $m_{BC} : 3x - 2y + 3 = 0$
   (b)Coordonnées de $M(1, 3)$
   (c) $\text{dist}(AM) = \text{dist}(BM) = \text{dist}(CM) = \sqrt{26}$
   (d) $\text{dist}(M, AB) = \sqrt{13}$

8. (a) Les coordonnées des sommet du triangle sont $(-1, -1)$, $(3, 1)$ et $(-2, 6)$.
   (b) Centre de gravité : $(0, 2)$; orthocentre : $(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3})$; centre du cercle circonscrit : $(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{3})$

9. (a) $k = -29$ (b) $k = -11$

10. (a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ (c) $x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0$

11. (a) $(7, 4)$ et $(8, 1)$: la droite est sécante au cercle.
    (b) $(\dfrac{36}{13}, -\dfrac{15}{13})$: la droite est tangente au cercle.

12. Non car la distance entre les centres est supérieure à la somme des rayons.

13. (a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; $(0,4)$ et $(0,-4)$
    (b) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$; $e=\frac{5}{13}$
    (c) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; $e=\frac{5}{13}$

14. (a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$; $e=\sqrt{5}$
    (b) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=-1$; $y=\frac{5}{12}x$ et $y=-\frac{5}{12}x$
    (c) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$; $e=\frac{13}{5}$

15. (a) $k=1$ (b) $k=12$

16. La droite n'a aucun point commun avec la parabole.

17. $\mathcal{P}_1$: foyer $(-1,0)$ $\mathcal{P}_2$: foyer $(0,\frac{\sqrt{2}}{4})$; coord. des points communs : $(0,0)$ et $(-2,2\sqrt{2})$

18. et 19.
    1) parabole : foyer $(1,0)$ et directrice : $x=-1$
    2) ellipse : foyers $(\sqrt{5},0)$ et $(-\sqrt{5},0)$
    3) conique dégénérée en un point de coordonnées $(0,0)$
    4) parabole : foyer $(0,-\frac{1}{3})$ et directrice : $y=-\frac{2}{3}$
    5) cercle : centre $(0,0)$ et rayon 3
    6) hyperbole : foyers $(5,0)$ et $(-5,0)$; asymptotes : $y=\frac{3}{4}x$ et $y=-\frac{3}{4}x$
    7) cercle : centre $(1,-2)$ et rayon 5
    8) 2 droites sécantes d'équation $y=\frac{2}{5}x$ et $y=-\frac{2}{5}x$
    9) hyperbole : foyers $(0,5)$ et $(0,-5)$; asymptotes : $y=\frac{3}{4}x$ et $y=-\frac{3}{4}x$
    10) ellipse : foyers $(\frac{3}{2},0)$ et $(-\frac{3}{2},0)$

Chapitre 4

Fonctions d'une variable réelle

4.1 Définitions

4.1.1 Fonction, domaine de définition, image, graphe, graphique et zéro

Une **fonction** réelle d'une variable réelle est une loi qui, à tout élément d'un ensemble A de $\mathbb{R}$ associe un seul réel. De façon générale, on note une fonction f sous la forme $f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$; $f(x)$ est un réel : c'est l'image par f du réel x de A.

Le **domaine de définition** d'une fonction f est l'ensemble des réels qui ont une image par f ; on le note $\mathrm{dom}(f)$ et, avec la notation ci-dessus, $\mathrm{dom}(f) = A$.
L'**image** d'une fonction f est l'ensemble des réels $f(x)$ images de tous les réels x du domaine de définition de f. Cet ensemble est noté $\mathrm{im}(f)$;on a donc $\mathrm{im}(f) = \{f(x) : x \in \mathrm{dom}(f)\}$.

Le **graphe** d'une fonction f est l'ensemble $\{(x, f(x)) : x \in \mathrm{dom}(f)\}$.
Le **graphique** d'une fonction f est la représentation géométrique (graphique) de son graphe.

Un **zéro** d'une fonction f est un réel du domaine de définition de f dont l'image par f vaut zéro. De façon équivalente, le réel $a \in \mathrm{dom}(f)$ est un zéro de f si $f(a) = 0$. Graphiquement, un zéro d'une fonction est l'abscisse d'un point d'intersection du graphique de la fonction avec l'axe des abscisses.

4.1.2 Fonction constante, croissante, décroissante, monotone

Soit f une fonction réelle définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$.

La **fonction** f est **constante** sur A si $\forall x \in A : f(x) = k,\ k$ étant un réel fixé ; le graphique d'une telle fonction est une droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation cartésienne $y = k$. Le domaine de définition de cette fonction est $\mathbb{R}$ et l'image est $\{k\}$.

La **fonction** f est **croissante** sur A si $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Ainsi, chaque fois qu'on prend deux réels distincts de A, la relation d'ordre est conservée entre ces réels et leurs images par f.

La **fonction** f est **décroissante** sur A si $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Ainsi, chaque fois qu'on prend deux réels distincts de A, la relation d'ordre est renversée entre ces réels et leurs images par f.

La **fonction** f est **monotone** sur A si elle y est soit croissante, soit décroissante.
Elle est **strictement croissante (resp. décroissante, monotone)** sur A si les inégalités précédentes sont strictes.

4.1.3 Maximum, minimum, extremum

Soit f une fonction réelle définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$.

La fonction f admet un **maximum local** en $a \in A$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in [a-r, a+r] \cap A$; la valeur du maximum est $f(a)$.

La fonction f admet un **minimum local** en $a \in A$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in [a-r, a+r] \cap A$; la valeur du minimum est $f(a)$.

Si l'inégalité est vraie pour tout $x \in A$ on parle alors d'un **maximum** ou d'un **minimum global**.
Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

4.1.4 Relations entre fonctions

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$.

Les **fonctions** f et g sont **égales**, ce qu'on note $f = g$, si elles ont des images égales pour tous les réels de leur domaine de définition commun A. Ainsi, $f = g$ si $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) = A$ et si $\forall x \in A : f(x) = g(x)$.

La **fonction** f est **supérieure à la fonction** g, ce qu'on note $f \geq g$, si $\forall x \in A : f(x) \geq g(x)$.
On a des définitions analogues pour $f > g$, $f \leq g$ et $f < g$.

La **fonction** f est **positive** sur A, ce qu'on note $f \geq 0$ si $\forall x \in A : f(x) \geq 0$.
On a des définitions analogues pour **fonction négative, strictement positive (resp. négative)**.

4.1.5 Fonction injective, surjective, bijective

Soit f une fonction réelle définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$.

Cette **fonction** est **injective** si deux réels distincts du domaine de définition ont des images distinctes ou, de façon équivalente, si tout réel de l'image provient d'un seul réel du domaine de définition. En symboles mathématiques, on note

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{ou} \qquad \forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Graphiquement, toute droite parallèle à l'axe des abscisses rencontre le graphique de f en un point au plus.

Si f est défini par $f : A \to \mathrm{im}(f) : x \mapsto f(x)$ alors f est une **fonction surjective**. Il suffit donc de spécifier l'image d'une fonction pour la rendre surjective.
Une **fonction bijective** est une fonction à la fois injective et surjective.

4.1.6 Fonction inverse (réciproque) d'une fonction

Soit f une fonction injective réelle définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$.

La **fonction inverse** de f est la fonction de domaine de définition égal à l'image de f, qui à tout réel $y \in \mathrm{im}(f)$ associe le réel $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$; on note cette fonction f^{-1}.

Ainsi, si on a $f : A \to \mathbb{R}$ injectif alors $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to A : y \mapsto f^{-1}(y)$ tel que $y = f(x),\ x \in A$.
Dans un repère normé, les graphiques des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation cartésienne $y = x$.

4.1.7 Fonction paire, impaire, périodique

Soit f une fonction réelle définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$.

La **fonction** f est **paire** si $\forall x \in A$, on a $-x \in A$ et $f(-x) = f(x)$.
Le graphique d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

La **fonction** f est **impaire** si $\forall x \in A$, on a $-x \in A$ et $f(-x) = -f(x)$.
Le graphique d'une fonction impaire admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

La **fonction** f est **périodique de période** T si $\forall x \in A$, on a $x+T \in A$ et $f(x+T) = f(x)$; la **période** T est le plus petit réel strictement positif qui vérifie cette égalité.
Le graphique d'une fonction périodique est complètement connu lorsqu'on le connaît sur un intervalle de longueur égale à la période.

4.1.8 Opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$.

La **somme des fonctions** f et g est la fonction notée $f+g$ qui à tout réel $x \in A$ associe le réel $f(x)+g(x)$.
En symboles mathématiques, on note $f + g : A \to \mathbb{R} : x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Le **produit des fonctions** f et g est la fonction notée $f.g$ qui à tout réel $x \in A$ associe le réel $f(x).g(x)$.
En symboles mathématiques, on note $f.g : A \to \mathbb{R} : x \mapsto (f.g)(x) = f(x)\ .\ g(x)$.

Le **quotient des fonctions** f et g est la fonction notée $\frac{f}{g}$ qui à tout réel $x \in A \setminus \{x : g(x) = 0\}$ associe le réel $\frac{f(x)}{g(x)}$. En symboles mathématiques, on note $\frac{f}{g} : A \setminus \{x : g(x) = 0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Soient f une fonction réelle définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ et g une fonction réelle définie sur un sous-ensemble B de $\mathbb{R}$ tel que $\{g(x) : x \in B\} \subset A$.

La **fonction composée** $f \circ g$ est la fonction qui à tout réel $x \in B$ associe le réel $f(g(x))$. En symboles mathématiques, on note $f \circ g : B \to \mathbb{R} : x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

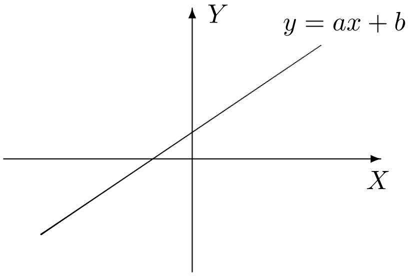
4.2 Fonctions élémentaires

4.2.1 Fonction polynôme du premier degré

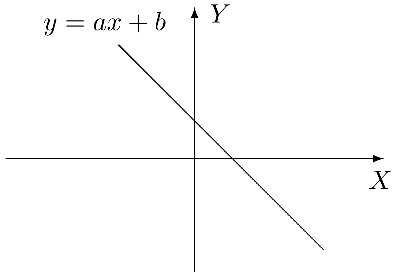
Une fonction polynôme du premier degré est une fonction du type $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

On a $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$ et son unique zéro est $-\frac{b}{a}$. Le graphique de cette fonction est une droite qui rencontre l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, b)$.

$\boxed{a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0}$



$\boxed{a < 0 \quad \text{et} \quad b > 0}$



Signe de cette fonction

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax + b$	signe de $(-a)$	0	signe de a

Cas particulier : la **fonction identique** est la fonction définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x$; son graphique est la bissectrice du premier quadrant.

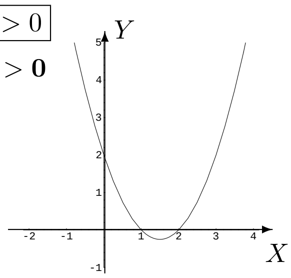
4.2.2 Fonction polynôme du second degré

Une fonction polynôme du second degré est une fonction du type $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

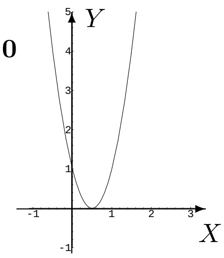
On a $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Le graphique de cette fonction est une parabole qui rencontre l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, c)$ et dont le sommet a pour coordonnées $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Ce sommet est un minimum si $a > 0$ et un maximum si $a < 0$. Dés lors, $\text{im}(f) = \left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right[$ si $a > 0$ et $\text{im}(f) = \left]-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$ si $a < 0$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\boxed{a > 0}$

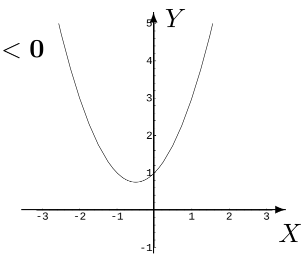
$\boldsymbol{\Delta > 0}$



$\boldsymbol{\Delta = 0}$

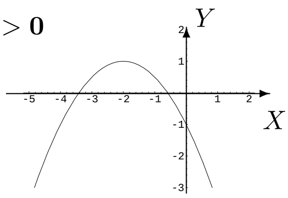


$\boldsymbol{\Delta < 0}$

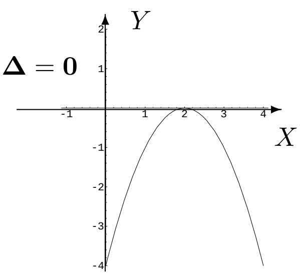


$\boxed{a < 0}$

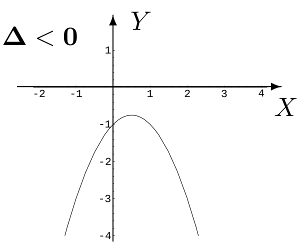
$\boldsymbol{\Delta > 0}$



$\boldsymbol{\Delta = 0}$



$\boldsymbol{\Delta < 0}$



Zéros de cette fonction

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Si $\Delta > 0$ alors les zéros sont donnés par $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Si $\Delta = 0$ alors le zéro double est donné par $\dfrac{-b}{2a}$.

• Si $\Delta < 0$ alors le polynôme n'a pas de zéro réel.

Signe de cette fonction

• $\Delta > 0$: si x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$) sont les zéros du trinôme, on a

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

• $\Delta = 0$: si $x_1 = x_2$ est le zéro double du trinôme, on a

x		$x_1 = x_2$	
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de a

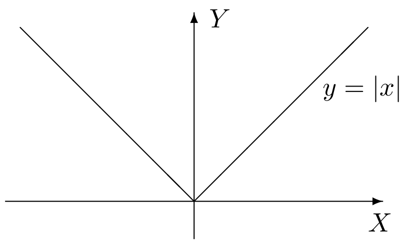
• $\Delta > 0$

x	
ax^2+bx+c	signe de a

4.2.3 Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est la fonction définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

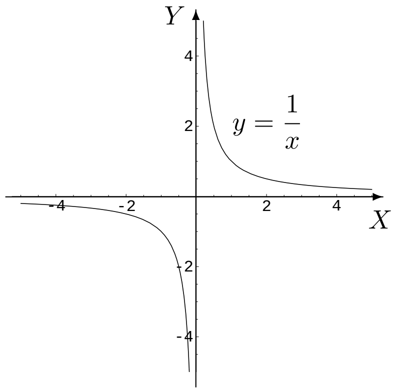
On a $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty[$; c'est une fonction paire, positive dont le seul zéro est 0.



4.2.4 Fonction inverse d'un réel

La fonction inverse d'un réel est la fonction définie par $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

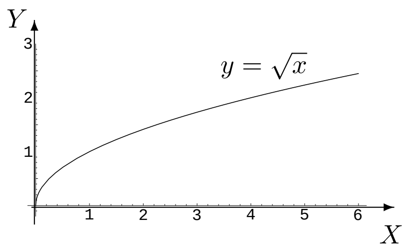
On a $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}_0$; c'est une fonction impaire qui n'a pas de zéro.

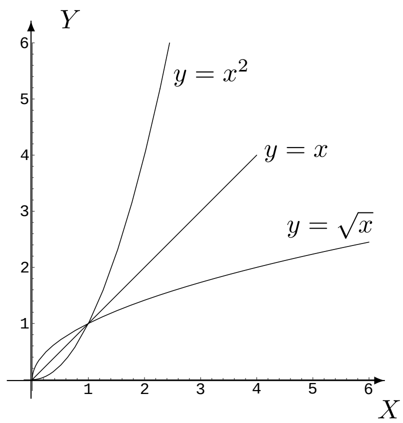


4.2.5 Fonction racine carrée

La fonction racine carrée est la fonction définie par $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$.

On a $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{im}(f) = [0, +\infty[$; c'est une fonction positive dont le seul zéro est 0. Cette fonction est l'inverse de la fonction $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto x^2$.



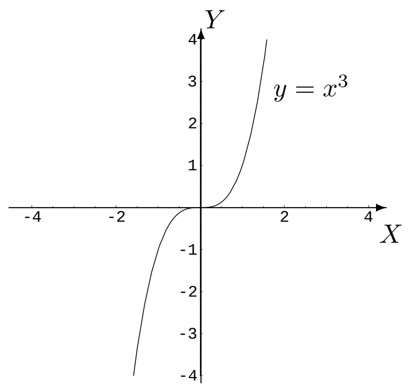


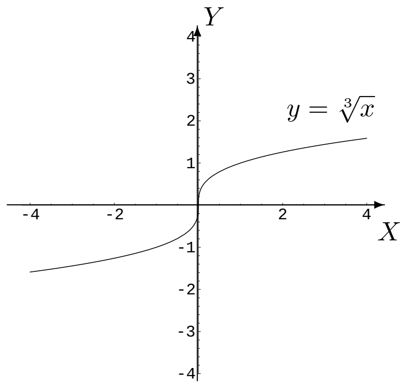
4.2.6 Fonctions cube et racine cubique

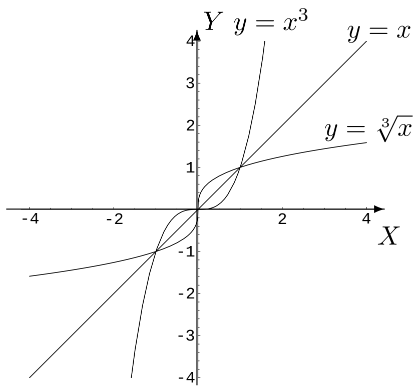
La fonction cube est la fonction définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.

On a $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$; c'est une fonction impaire dont le seul zéro est 0.

Cette fonction a pour inverse la fonction racine cubique définie par $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$, fonction impaire dont le seul zéro est 0 et telle que $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathbb{R}$.







4.2.7 Fonctions sinus et arc sinus

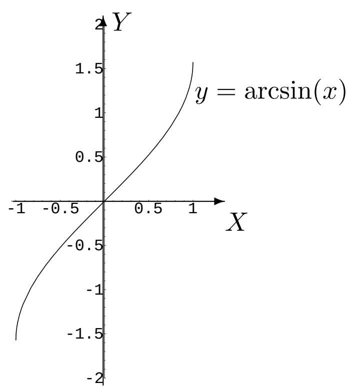
La fonction sinus a été définie et représentée graphiquement dans le chapitre de trigonométrie. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$ et son image est $[-1, 1]$. C'est une fonction impaire, périodique de période 2π et elle a pour zéros les réels $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

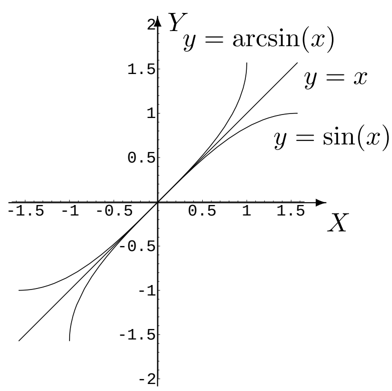
Afin de rendre cette fonction injective, on réduit son domaine de définition à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dès lors, on peut définir sa fonction inverse, la fonction arc sinus.

La fonction arc sinus est la fonction définie par

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : x \mapsto \arcsin(x) = y \Leftrightarrow \sin(y) = x.$$

On a $\mathrm{dom}(f) = [-1, 1]$ et $\mathrm{im}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; c'est une fonction impaire dont le seul zéro est 0.





4.2.8 Fonctions cosinus et arc cosinus

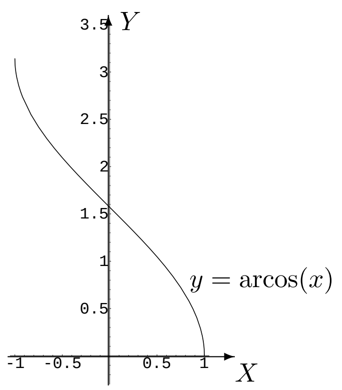
La fonction cosinus a été définie et représentée graphiquement dans le chapitre de trigonométrie. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$ et son image est $[-1,1]$. C'est une fonction paire, périodique de période 2π et elle a pour zéros les réels $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

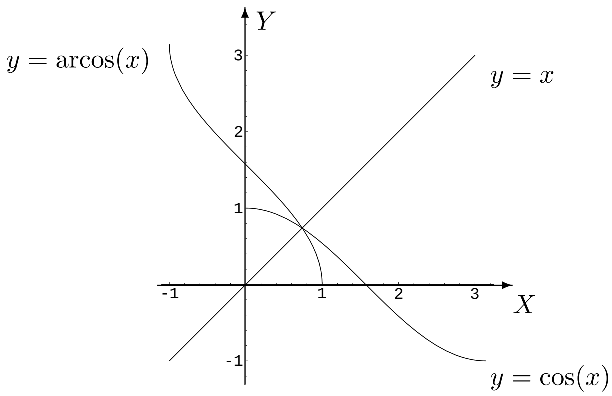
Afin de rendre cette fonction injective, on réduit son domaine de définition à l'intervalle $[0,\pi]$. Dès lors, on peut définir sa fonction inverse, la fonction arc cosinus.

La fonction arc cosinus est la fonction définie par

$$\text{arcos} : [-1,1] \to [0,\pi] : x \mapsto \text{arcos}(x) = y \Leftrightarrow \cos(y) = x.$$

On a $\text{dom}(f) = [-1,1]$ et $\text{im}(f) = [0,\pi]$; c'est une fonction positive dont le seul zéro est 1.





4.2.9 Fonctions tangente et arc tangente

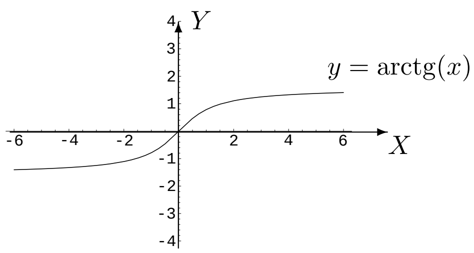
La fonction tangente a été définie et représentée graphiquement dans le chapitre de trigonométrie. Son domaine de définition est $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ et son image est $\mathbb{R}$. C'est une fonction impaire, périodique de période π et elle a pour zéros les réels $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

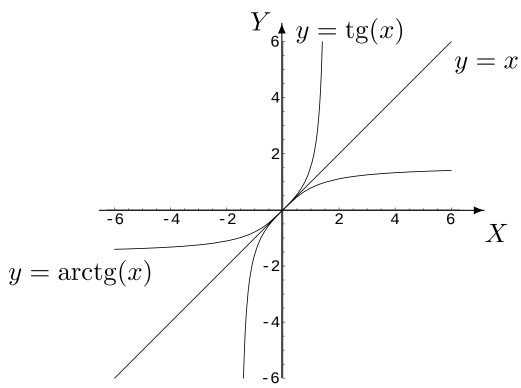
Afin de rendre cette fonction injective, on réduit son domaine de définition à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Dès lors, on peut définir sa fonction inverse, la fonction arc tangente.

La fonction arc tangente est la fonction définie par

$$\text{arctg} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[: x \mapsto \text{arctg}(x) = y \Leftrightarrow \text{tg}(y) = x.$$

On a $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ et $\text{im}(f) = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; c'est une fonction impaire dont le seul zéro est 0.





4.2.10 Fonctions cotangente et arc cotangente

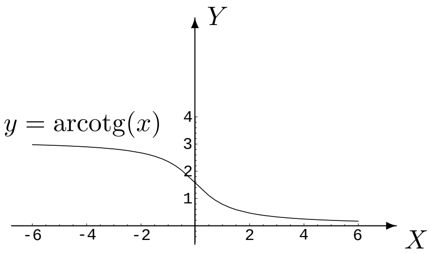
La fonction cotangente a été définie et représentée graphiquement dans le chapitre de trigonométrie. Son domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et son image est $\mathbb{R}$. C'est une fonction impaire, périodique de période π et elle a pour zéros les réels $\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

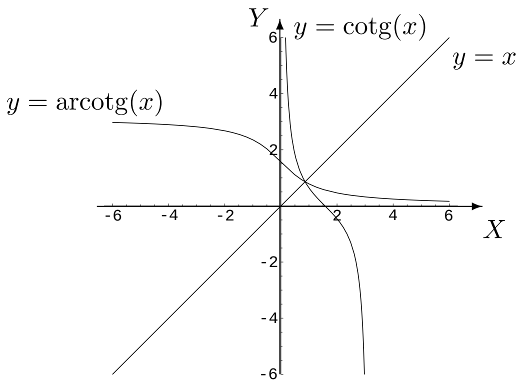
Afin de rendre cette fonction injective, on réduit son domaine de définition à l'intervalle $]0, \pi[$. Dès lors, on peut définir sa fonction inverse, la fonction arc cotangente.

La fonction arc cotangente est la fonction définie par

$$\text{arcotg} : \mathbb{R} \to]0, \pi[: x \mapsto \text{arcotg}(x) = y \Leftrightarrow \text{cotg}(y) = x.$$

On a $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ et $\text{im}(f) =]0, \pi[$; c'est une fonction strictement positive.





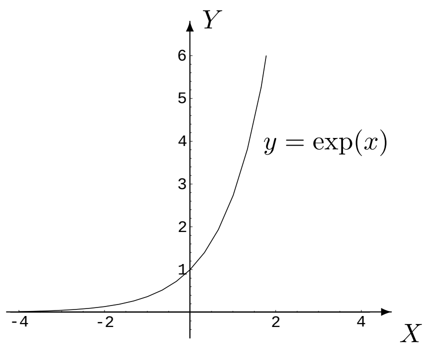
4.2.11 Fonctions exponentielle et logarithme

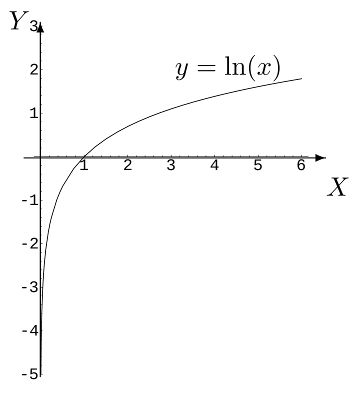
La fonction exponentielle, notée exp[1], est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $]0, +\infty[$. C'est une fonction strictement positive dont l'une des propriétés fondamentales est $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x)\ .\ \exp(y)$. On a aussi $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e \approx 2,71$.
Comme cette fonction est injective, on peut définir sa fonction inverse, la fonction logarithme.

La fonction logarithme est la fonction définie par

$$\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x) = y \Leftrightarrow \exp(y) = x.$$

On a $\text{dom}(f) =]0, +\infty[$ et $\text{im}(f) = \mathbb{R}$; c'est une fonction dont le seul zéro est 1. L'une de ses propriétés fondamentales est $\forall x, y \in]0, +\infty[: \ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$. On a aussi $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.



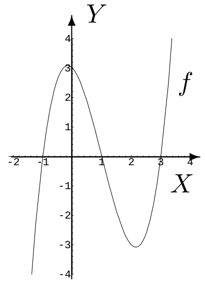


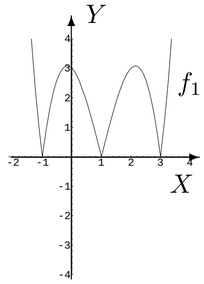
[1] On note aussi $\exp(x)$ sous la forme e^x.

4.3 Manipulations graphiques

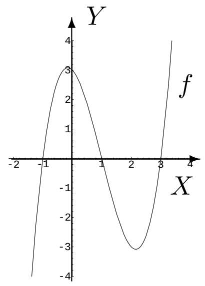
Soit une fonction réelle $f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$. A partir du graphique de cette fonction, représenter le graphique de
1) $f_1 : x \mapsto f_1(x) = |f(x)|$
2) $f_2 : x \mapsto f_2(x) = -f(x)$
3) $f_3 : x \mapsto f_3(x) = f(-x)$
4) $f_4 : x \mapsto f_4(x) = f(x) + k,\ k$ étant un réel fixé.
5) $f_5 : x \mapsto f_5(x) = f(x + k),\ k$ étant un réel fixé.
6) $f_6 : x \mapsto f_6(x) = kf(x),\ k$ étant un réel fixé.
7) $f_7 : x \mapsto f_7(x) = f(kx),\ k$ étant un réel fixé.

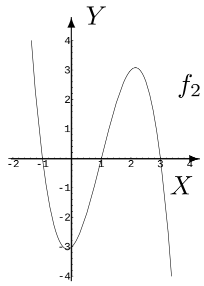
• Pour représenter le graphique de f_1 à partir de celui de f, il suffit d'effectuer une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses pour tous les points du graphique de f dont les ordonnées sont négatives.
Exemple :



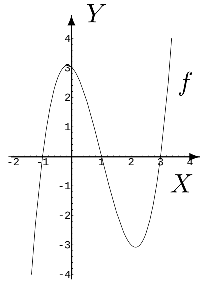


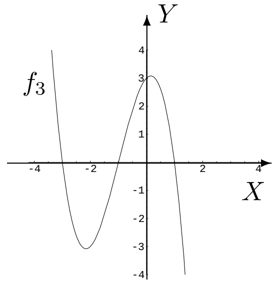
• Pour représenter le graphique de f_2 à partir de celui de f, il suffit d'effectuer une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses pour tous les points du graphique de f.
Exemple :





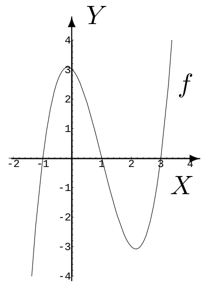
• Pour représenter le graphique de f_3 à partir de celui de f, il suffit d'effectuer une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées pour tous les points du graphique de f.
Exemple :

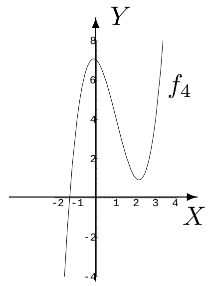




• Pour représenter le graphique de f_4 à partir de celui de f, il suffit de faire subir la translation qui applique le point de coordonnées $(0, 0)$ sur celui de coordonnées $(0, k)$ à tous les points du graphique de f.

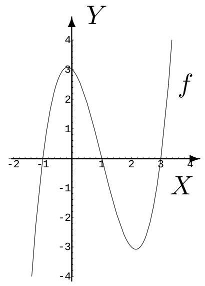
Exemple :

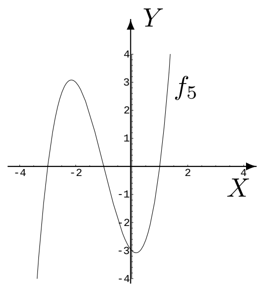




• Pour représenter le graphique de f_5 à partir de celui de f, il suffit de faire subir la translation qui applique le point de coordonnées $(0, 0)$ sur celui de coordonnées $(-k, 0)$ à tous les points du graphique de f.

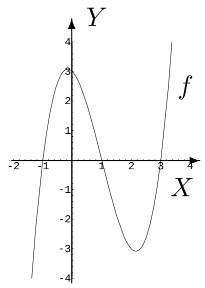
Exemple :

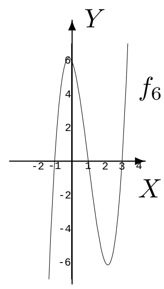




• Pour représenter le graphique de f_6 à partir de celui de f, il suffit d'appliquer à tous les points du graphique de f la transformation du plan qui applique tout point de coordonnées (x, y) sur celui de coordonnées (x, ky) .

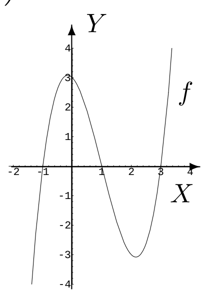
Exemple :

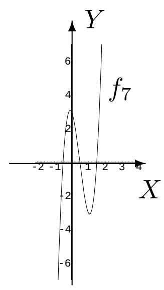




• Pour représenter le graphique de f_7 à partir de celui de f, il suffit d'appliquer à tous les points du graphique de f la transformation du plan qui applique tout point de coordonnées (x, y) sur celui de coordonnées $\left(\frac{x}{k}, y\right)$.

Exemple :





4.4 Quelques exercices résolus

4.4.1 Domaine de définition et zéros d'une fonction

Déterminer le domaine de définition et les zéros éventuels des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2-1}$
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x^2-1}}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x^2-1}}$
4. $fx) = \dfrac{x+2}{|x-1|-3}$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x-2}{x^2-1}\right)$
6. $f(x) = \ln(x^2)$
7. $f(x) = 2\ln(x)$
8. $f(x) = \mathrm{tg}(x + \dfrac{\pi}{6})$
9. $f(x) = \sqrt{2\sin(x)+1}$
10. $f(x) = \arcsin(2x+1)$
11. $f(x) = \exp(\sqrt{x^2-1})$

1) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ puisque $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Son seul zéro est $\dfrac{2}{3}$ puisque $3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$.

2) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{3x-2}{x^2-1} \geq 0\}$. Etudions le signe de la fraction : on a

x		-1		$2/3$		1	
$3x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{3x-2}{x^2-1}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

Dès lors, on a $\mathrm{dom}(f) =]-1, 2/3] \cup]1, +\infty[$ et le seul zéro de cette fonction est $2/3$.

3) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x - 2 \geq 0, x^2 - 1 > 0\} =]1, +\infty[$. Comme $2/3$ n'appartient pas au domaine de définition de cette fonction, celle-ci ne possède pas de zéro. Remarquons que cette fonction n'est pas égale à la précédente puisque les domaines de définition de ces deux fonctions sont différents.

4) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| - 3 \neq 0\}$. Comme $|x-1| - 3 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$, on a $A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$. Cette fonction ne posséde pas de zéro puisque -2 n'appartient pas au domaine de définition.

5) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{3x-2}{x^2-1} > 0\}$. En se reportant à l'exemple 2, on voit que $\mathrm{dom}(f) =]-1, 2/3[$. Pour chercher les éventuels zéros, on résout

$$\ln\left(\frac{3x-2}{x^2-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Vu le domaine de définition, le seul zéro est $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

6) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\} = \mathbb{R}_0$. Ses zéros sont solutions de l'équation $x^2 = 1$; on a donc -1 et 1 comme zéros.

7) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$; son seul zéro vaut 1.

8) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x + \dfrac{\pi}{6}) \neq 0\}$. Comme on a

$$\cos(x + \frac{\pi}{6}) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}),$$

le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + k\pi \ : k \in \mathbb{Z}\}$.

9) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : 2\sin(x) + 1 \geq 0\}$. Comme $2\sin(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin(x) \geq -\frac{1}{2}$, on a $A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]$ et les zéros de la fonction sont les réels $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

10) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x + 1 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq 2x \leq 0\} = [-1, 0]$. Le seul zéro de cette fonction est $-\frac{1}{2}$.

11) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et n'a aucun zéro.

4.4.2 Parité et périodicité d'une fonction

Pour chacune des fonctions données, donner le domaine de définition et déterminer si elle est paire, impaire, périodique (en donner alors la période)

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2}$ 2) $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$ 3) $f(x) = \frac{2\sin(x) + 1}{\cos(2x)}$ 4) $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos(4x)$.

1) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0, x^2 \neq 0\} =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$; ainsi si $x \in A$ alors $-x \in A$. De plus, $f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2 - 4}}{(-x)^2} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} = f(x)$. Dès lors, cette fonction est paire. Elle n'est pas périodique car il n'existe aucun réel T strictement positif tel que $f(x + T) = f(x)$.

2) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$; ainsi si $x \in A$ alors $-x \in A$. De plus, $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^4 + 1} = \frac{-x^3}{x^4 + 1} = -\frac{x^3}{x^4 + 1} = -f(x)$. Dès lors, cette fonction est impaire. Elle n'est pas périodique car il n'existe aucun réel T strictement positif tel que $f(x + T) = f(x)$.

3) La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(2x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. Ainsi, si $x \in A$ alors $-x \in A$ mais comme $f(-x) = \frac{2\sin(-x) + 1}{\cos(-2x)} = \frac{-2\sin(x) + 1}{\cos(2x)}$, expression qui n'est ni égale à $f(x)$, ni à $-f(x)$, cette fonction n'est ni paire, ni impaire. Cependant, elle est périodique de période 2π car $f(x + T) = \frac{2\sin(x + T) + 1}{\cos(2x + 2T)} = \frac{2\sin(x) + 1}{\cos(2x)} = f(x)$ notamment si $T = 2\pi$, plus petite valeur strictement positive de T.

4) La fonction est définie sur $A = \mathbb{R}$. Ainsi si $x \in A$ alors $-x \in A$ mais comme $f(-x) = \sin(-2x + \frac{\pi}{4}) + \cos(-4x) = -\sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos(4x)$, expression qui n'est ni égale à $f(x)$, ni à $-f(x)$, cette fonction n'est ni paire, ni impaire. Cependant, elle est périodique de période π car $g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \sin(2x + 2T + \frac{\pi}{4}) = g(x + T)$ si $T = \pi$, plus petite valeur strictement positive de T et $h(x) = \cos(4x) = \cos(4x + 4T) = h(x + T)$ si $T = \frac{\pi}{2}$, plus petite valeur strictement positive de T. Dès lors, $f = g + h$ est périodique de période π, plus petit multiple commun à π et $\frac{\pi}{2}$.

4.4.3 Opérations sur les fonctions

1. On donne les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $g : x \mapsto x^2-4$. Déterminer les fonctions $f+g,\ f.g,\ \dfrac{f}{g},\ f\circ g$ et $g \circ f$ ainsi que leur domaine de définition.

   Comme $\mathrm{dom}(f) = [1,+\infty[$ et $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{R}$, on a $\mathrm{dom}(f+g) = \mathrm{dom}(f.g) = [1,+\infty[\ \cap \mathbb{R} = [1,+\infty[$ ainsi que $\quad f+g : x \mapsto \sqrt{x-1} + x^2 - 4 \quad$ et $\quad f.g : x \mapsto (x^2-4)\sqrt{x-1}$.

   Les zéros de g étant -2 et 2, le domaine de définition de $\dfrac{f}{g}$ est l'ensemble $A = [1,+\infty[\setminus\{2\}$ et on a $\quad \dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$.

   Pour déterminer $\mathrm{dom}(f\circ g)$, il est nécessaire et suffisant d'avoir $\{x^2-4 : x \in \mathbb{R}\} \subset [1,+\infty[$. Dès lors, $\mathrm{dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 1\} =]-\infty,-\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5},+\infty[$ $\quad$ et on a

   $$f\circ g : x \mapsto \sqrt{(x^2-4)-1} = \sqrt{x^2-5}.$$

   Pour déterminer $\mathrm{dom}(g\circ f)$, il est nécessaire et suffisant d'avoir $\{\sqrt{x-1} : x \in [1,+\infty[\} \subset \mathbb{R}$. Dès lors, $\mathrm{dom}(g\circ f) = [1,+\infty[$ $\quad$ et on a

   $$g \circ f : x \mapsto (\sqrt{x-1})^2 - 4 = x-1-4 = x-5.$$

   Constatons que la composition de 2 fonctions n'est pas une opération commutative et que le domaine de définition de la fonction $g\circ f$ n'est pas égal à celui de la fonction $x \mapsto x-5$.

2. On donne la fonction $f : x \mapsto \exp(\sin(\sqrt{x^2-1}))$. Comment décomposer cette fonction en fonctions élémentaires $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ telles que $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$?

   Si on considère les fonctions $f_1 : x \mapsto x^2-1$, $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$, $f_3 : x \mapsto \sin(x)$ et $f_4 : x \mapsto \exp(x)$ alors on a $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

4.4.4 Fonction inverse (réciproque)

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes ainsi que leur image. Ces fonctions sont-elles injectives ? Si oui, en déterminer la fonction inverse. Si non, réduire le domaine de définition pour qu'elle devienne injective puis déterminer la fonction inverse de cette nouvelle fonction.

$$f_1 : x \mapsto 3x+5 \qquad\qquad f_2 : x \mapsto x^2+1.$$

La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $\mathbb{R}$. En effet, si x est réel, $f_1(x) = 3x+5$ est réel aussi donc $\mathrm{im}(f_1) \subset \mathbb{R}$ et si y est un réel alors $x = \dfrac{y-5}{3}$ est un réel tel que $f_1(x) = y$ donc $\mathbb{R} \subset \mathrm{im}(f_1)$.
La fonction f_1 est injective car $\forall x_1, x_2 \in\ \mathrm{dom}(f) : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1+5 = 3x_2+5 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Dès lors, la fonction inverse de f_1 est la fonction $f_1^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \dfrac{y-5}{3}$.

La fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $[1,+\infty[$. En effet, si x est réel, $f_2(x) = x^2+1$ est réel supérieur ou égal à 1 donc $\mathrm{im}(f_2) \subset [1,+\infty[$ et si $y \in [1,+\infty[$ alors $x = \sqrt{y-1}$ est un réel tel que $f_2(x) = y$ donc $[1,+\infty[\subset \mathrm{im}(f_2)$.
La fonction f_2 n'est pas injective car, par exemple, $f_2(-1) = f_2(1) = 2$. Pour définir une fonction inverse, réduisons le domaine de définition et considérons, par exemple, la fonction

$$f :]-\infty,0] \to [1,+\infty[\ : x \mapsto x^2+1$$

qui est injective. Cette fonction a comme inverse la fonction

$$f^{-1} : [1,+\infty[\ \to\ ]-\infty,0] : y \mapsto -\sqrt{y-1}.$$

4.5 Quelques exercices à résoudre ... et leurs solutions

4.5.1 Exercices

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions $f : x \mapsto f(x)$ si

1. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-2}$
2. $f(x) = \sqrt{1-3x}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+4x+4}$
5. $f(x) = \dfrac{x^3-x}{x^3+4x^2-x-4}$
6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{2x-1}}$
7. $f(x) = \dfrac{2+|x|}{2-|x|}$
8. $f(x) = \sqrt{x^2+6x+9}$
9. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-4x^2}}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-|x-6|}$
11. $f(x) = \sqrt{5-3|x|}$
12. $f(x) = \sqrt{|x-4|}-3$
13. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{5x-2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$
14. $f(x) = \dfrac{1}{|x|-|x-1|}$
15. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^3-2x}}{\sqrt{2x+1}}$
16. $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$
17. $f(x) = \mathrm{tg}(2x)$
18. $f(x) = \mathrm{cotg}(x+\frac{\pi}{6})$
19. $f(x) = \cos(\sqrt{x})$
20. $f(x) = \sqrt{\cos(x)+1}$
21. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2}\sin(x)+1}$
22. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sin(2x)}{1+\sin(2x)}}$
23. $f(x) = \dfrac{\mathrm{tg}(3x)}{2\cos(x)+\sqrt{3}}$
24. $f(x) = \arcsin(\ln(x))$
25. $f(x) = \ln(\arcsin(x))$
26. $f(x) = \arccos(2x-x^2)$
27. $f(x) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1-x^2}{9x^2-3x}\right)$
28. $f(x) = \dfrac{1}{\arccos(\frac{1}{x})}$
29. $f(x) = \sqrt{1-\exp(2x)}$
30. $f(x) = \sqrt{\ln(2x)}$

2. Les fonctions $f : x \mapsto f(x)$ et $g : x \mapsto g(x)$ suivantes sont-elles égales ? Justifier.

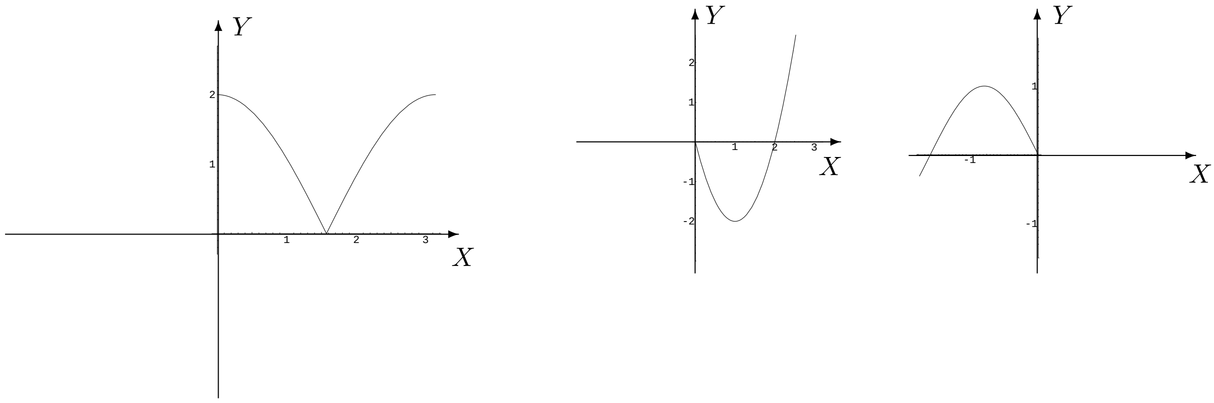
	f(x)=	g(x)=
1.	x	$\sqrt{x^2}$
2.	$x\sqrt{x}$	$\sqrt{x^3}$
3.	$\dfrac{x^2-1}{x-1}$	$x+1$
4.	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

	f(x)=	g(x)=
5.	$\sqrt{x(x-1)}$	$\sqrt{x}\sqrt{x-1}$
6.	$\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2}}$	$\dfrac{\sqrt{x-3}}{x}$
7.	$\ln(x^2)$	$2\ln(x)$
8.	$\ln(\lvert x-2\rvert)-\ln(\lvert x+3\rvert)$	$\ln\left\lvert\dfrac{x-2}{x+3}\right\rvert$

3. Déterminer le domaine de définition et les zéros des fonctions suivantes

1.	$f(x) = \|2-3x\| - 3x + 2$	6.	$f(x) = \sqrt{2\sin(x) - 1}$
2.	$f(x) = \|x\| + \|x+1\| + 3$	7.	$f(x) = \ln(\sin(x))$
3.	$f(x) = \sqrt{2}\sin(x) + 2$	8.	$f(x) = \ln(\arcsin(1-x))$
4.	$f(x) = \sin(x) - \sin(9x)$	9.	$\dfrac{\arccos(\frac{x}{2})}{\mathrm{arctg}(x)}$
5.	$f(x) = 2\cos^2(x) + \sin(x) - 2$	10.	$\dfrac{e^{x+1} - 1}{e^x}$

4. Compléter les graphiques suivants sachant que les fonctions représentées sont
   a) des fonctions paires
   b) des fonctions impaires



5. Etudier la parité des fonctions suivantes

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$		5.	$f(x) = x + \sin(x)$	9.	$f(x) = x^3 - \mathrm{tg}(x)$
2. $f(x) = \sin(2x)$		6.	$f(x) = \sqrt{\|x\|}$	10.	$f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$
3. $f(x) = \mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{2})$		7.	$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$	11.	$f(x) = \exp(-\|x\|)$
4. $f(x) = \frac{x^2+\|x\|}{x^2-\|x\|}$		8.	$f(x) = x\sin(x)$	12.	$f(x) = \ln\dfrac{x-2}{x+2}$

6. Les affirmations suivantes sont-elles correctes ? Justifier
   1. Si une fonction paire est définie en 0 alors $f(0) = 0$.
   2. Si une fonction impaire est définie en 0 alors $f(0) = 0$.
   3. La seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction constante nulle.
   4. La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ est impaire.
   5. La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ est impaire.
   6. Une condition nécessaire pour qu'une fonction soit paire ou impaire est que son domaine de définition soit du type $[-a, a]$ ou $]-a, a[$, $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \infty$.
   7. Une condition suffisante pour qu'une fonction soit paire ou impaire est que son domaine de définition soit du type $[-a, a]$ ou $]-a, a[$, $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \infty$.

7. On considère deux fonctions f et g ayant même domaine de définition. Que peut-on dire de la parité de leur somme, de leur différence, de leur produit, de leur quotient si

1.	les deux fonctions sont paires	3.	f est pair et g est impair
2.	les deux fonctions sont impaires	4.	f est impair et g est pair

8. Les fonctions suivantes sont-elles périodiques ? Si oui, en donner la période.

1. $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$	5. $f(x) = \lvert\sin(3x)\rvert$
2. $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x - \frac{\pi}{3})$	6. $f(x) = \ln(\sin(x))$
3. $f(x) = \operatorname{cotg}(3x - \frac{\pi}{5})$	6. $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{cotg}(2x))$
4. $f(x) = \cos^2(x)$	8. $f(x) = \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$

9. On considère les fonctions $f : x \mapsto |x^2 - 4|$ et $g : x \mapsto \ln(x+1)$. Déterminer l'expression explicite des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ ainsi que leur domaine de définition.

10. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes ainsi que leur image. Ces fonctions sont-elles injectives ? Si oui, en déterminer la fonction inverse. Si non, réduire le domaine de définition pour qu'elle devienne injective puis déterminer la fonction inverse de cette nouvelle fonction.

$$f_1 : x \mapsto x^3 - 1 \qquad f_2 : x \mapsto |x| \qquad f_3 : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

11. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Représenter graphiquement les fonctions suivantes : f, $f_1 = -f$, $f_2 = |f|$,$f_3 = f+2$, f_4 si $f_4(x) = f(-x)$ et f_5 si $f_5(x) = f(x-2)$.

4.5.2 Solutions

Exercice 1

1. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
2. $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$
3. $\mathbb{R}$
4. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$
5. $\mathbb{R} \setminus \{-4, -1, 1\}$
6. $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$
7. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
8. $\mathbb{R}$
9. $\left]1, \frac{3}{2}\right]$
10. $\mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$
11. $\left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$
12. $\mathbb{R}$
13. $]\sqrt{3}, 2] \cup [3, +\infty[$
14. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$
15. $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$
16. $\mathbb{R}$
17. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$
18. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
19. $[0, +\infty[$
20. $\mathbb{R}$
21. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
22. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
23. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$
24. $\left[\frac{1}{e}, e\right]$
25. $]0, 1]$
26. $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$
27. $\mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$
28. $]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$
29. $]-\infty, 0]$
30. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Exercice 2

1. Non ; les domaines de définition sont égaux à $\mathbb{R}$ mais $\sqrt{x^2} = |x| \neq x$ si $x < 0$.
2. Oui ; les domaines de définition sont égaux à $[0, +\infty[$ et $\sqrt{x^3} = |x|\sqrt{x} = x\sqrt{x}$ puisque $x > 0$.
3. Non ; les domaines de définition, respectivement égaux à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\mathbb{R}$, sont différents.
4. Oui ; les domaines de définition sont égaux à $]0, +\infty[$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.
5. Non ; les domaines de définition, respectivement égaux à $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ et $[1, +\infty[$, sont différents.
6. Oui ; les domaines de définition sont égaux à $[3, +\infty[$ et $\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x-3}}{|x|} = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x}$ puisque $x \geq 3$ donc x positif.

7. Non ; les domaines de définition, respectivement égaux à $\mathbb{R}_0$ et $]0, +\infty[$, sont différents.
8. Oui ; les domaines de définition sont égaux à $\mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$ et $\forall x, y > 0 : \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$.

Exercice 3

1. On a $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Tout réel de $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ est un zéro de cette fonction.

2. et 3. On a $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Ces fonctions n'ont pas de zéro.

4. On a $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Cette fonction a pour zéros les réels $\frac{k\pi}{4}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

5. On a $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Cette fonction a pour zéros les réels $k\pi$, $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

6. On a $\text{dom}(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$. Cette fonction a pour zéros les réels $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

7. On a $\text{dom}(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$. Cette fonction a pour zéros les réels $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

8. On a $\text{dom}(f) = [0, 1[$. Cette fonction a pour zéro le réel $1 - \sin 1$.

9. On a $\text{dom}(f) = [-2, 2] \setminus \{0\}$. Cette fonction a pour zéro le réel 2.

10. On a $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Cette fonction a pour zéro le réel -1.

Exercice 4

a) Effectuer une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.
b) Impossible pour le premier graphique ; pour les deux autres, effectuer une symétrie centrale par rapport à l'origine.

Exercice 5

Fonctions paires : 4, 6, 7, 8, 10, 11.

Fonctions impaires : 1, 2, 3, 5, 9, 12.

Exercice 6

1. Non. La fonction cosinus, par exemple, est une fonction paire définie en 0 mais $\cos(0) = 1 \neq 0$.
2. Oui car $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in$ dom(f) donc $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.
3. Oui car la fonction doit être à la fois telle que $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in$ dom(f). On a donc $f(x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$ $\forall x \in$ dom(f).
4. Non car $f(0) = 1 \neq 0$.
5. Oui car $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in$ dom$(f) = \mathbb{R}_0$.
6. Non (cf. item 5)
7. Non car la fonction $f : x \mapsto (x+1)\sqrt{1-x^2}$, par exemple, est définie sur $[-1, 1]$ mais n'est ni paire, ni impaire.

Exercice 7

1. Les fonctions $f + g$, $f - g$, $f.g$ et $\frac{f}{g}$ sont paires.

2. Les fonctions $f + g$ et $f - g$ sont impaires tandis que $f.g$ et $\frac{f}{g}$ sont paires.

3. et 4. Les fonctions $f + g$ et $f - g$ ne sont ni paires, ni impaires tandis que $f.g$ et $\frac{f}{g}$ sont impaires.

Exercice 8

Toutes ces fonctions sont périodiques. Les périodes valent
1) 4π 2) π 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) π 5) $\frac{\pi}{3}$ 6) 2π 7) $\frac{\pi}{2}$ 8) 2π

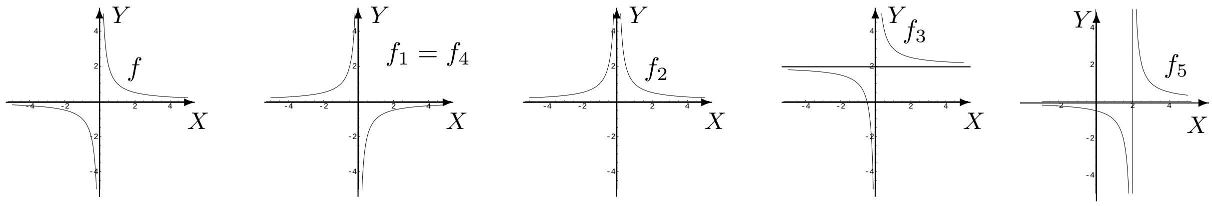
Exercice 9

On a $\quad f \circ g :]-1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto |\ln^2(x+1) - 4| \quad$ et $\quad g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(|x^2 - 4| + 1)$.

Exercice 10

• $\operatorname{dom}(f_1) = \operatorname{im}(f_1) = \mathbb{R}$. La fonction f_1 est injective et on a $f_1^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt[3]{y+1}$.
• $\operatorname{dom}(f_2) = \mathbb{R}$ et $\operatorname{im}(f_2) = [0, +\infty[$. La fonction f_2 n'est pas injective mais si on considère la fonction $f :]-\infty, 0] \to [0, +\infty[: x \mapsto |x|$, par exemple, alors on a une fonction injective telle que $f^{-1} : [0, +\infty[\to]-\infty, 0] : y \mapsto -y$.
• $\operatorname{dom}(f_3) = \operatorname{im}(f_3) = \mathbb{R}_0$. La fonction f_3 est injective et on a $f_3^{-1} = f_3$.

Exercice 11



Chapitre 5

Limites et continuité

5.1 Suite de réels

5.1.1 Définition

Une suite est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des naturels ou des entiers, ou un sous-ensemble infini de ceux-ci.

5.1.2 Suite convergente

Soit x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de réels.
Cette **suite converge vers le réel r** si, à partir d'une certaine valeur de l'indice, la distance entre un terme de la suite et r est aussi petite que l'on veut. En symboles mathématiques, on note

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N}_0 \text{ tel que } \forall m \geq M : |x_m - r| \leq \varepsilon.$$

Cette **suite converge vers l'infini** si, à partir d'une certaine valeur de l'indice, tout élément de la suite, en valeur absolue, est aussi grand que l'on veut. En symboles mathématiques, on note

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N}_0 \text{ tel que } \forall m \geq M : |x_m| \geq \varepsilon.$$

5.2 Limite des valeurs d'une fonction

5.2.1 Définition "par les suites"

Limite en un réel

Soient une fonction f de domaine de définition A et x_0 un réel tel que tout intervalle ouvert qui le contient rencontre A.

• La limite en x_0 de f est le réel b, ce qu'on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, si, pour toute suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de A qui converge vers x_0, la suite $f(x_m)$ converge vers b.

Remarque : pour une limite à gauche de x_0, notée $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = b$, les intervalles ouverts contenant x_0 rencontrent $A \cap \,]-\infty, x_0[$ et les suites sont constituées de réels $x_m < x_0$.
De façon analogue, on parle d'une limite à droite de x_0 que l'on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = b$.

• La limite en x_0 de f est infinie, ce qu'on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, si, pour toute suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de A qui converge vers x_0, la suite $f(x_m)$ converge vers ∞.

Remarque : on peut éventuellement préciser s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$ comme limite en étudiant le signe de la fonction f pour des valeurs de x proches de x_0.

Limite en l'infini

Soit une fonction f de domaine de définition A non borné.

• La limite en l'infini de f est le réel b, ce qu'on note $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, si, pour toute suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de A qui converge vers l'infini, la suite $f(x_m)$ converge vers b.

• La limite en l'infini de f est infinie, ce qu'on note $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, si, pour toute suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de A qui converge vers l'infini, la suite $f(x_m)$ converge vers l'infini.

Remarque : lorsqu'on calcule une limite en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), on ne considère que des suites x_m de nombres positifs (resp. négatifs).

5.2.2 Définition en "ε, η"[1]

Limite en un réel

Soient une fonction f de domaine de définition A et x_0 un réel tel que tout intervalle ouvert qui le contient rencontre A.

• La limite en x_0 de f est le réel b si les images par f d'éléments x de A sont aussi proches qu'on veut de b pour autant que ces x soient assez proches de x_0. En symboles mathématiques, on note

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{r} |x - x_0| \leq \eta \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

• La limite en x_0 de f est infinie si les images par f d'éléments x de A sont, en valeur absolue, aussi grandes qu'on veut pour autant que ces x soient assez proches de x_0. En symboles mathématiques, on note

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{r} |x - x_0| \leq \eta \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)| \geq \varepsilon.$$

Limite en l'infini

Soit une fonction f de domaine de définition A non borné.

• La limite en l'infini de f est le réel b si les images par f d'éléments x de A sont aussi proches qu'on veut de b pour autant que ces x, en valeur absolue, soient assez grands. En symboles mathématiques, on note

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{r} |x| \geq \eta \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

• La limite en l'infini de f est infinie si les images par f d'éléments x de A sont, en valeur absolue, aussi grandes qu'on veut pour autant que ces x, en valeur absolue, soient assez grands. En symboles mathématiques, on note

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{r} |x| \geq \eta \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)| \geq \varepsilon.$$

[1]Ces définitions sont équivalentes à celles données par les suites.

Remarques :
1) pour une limite en $-\infty$, on remplace $|x| \geq \eta$ par $-x \geq \eta \Leftrightarrow x \leq -\eta$.
2) pour une limite égale à $+\infty$, on remplace $|f(x)| \geq \varepsilon$ par $f(x) \geq \varepsilon$.

5.3 Propriétés

5.3.1 Unicité

Si elle existe, la limite d'une fonction en un point est unique.

5.3.2 Limite et opérations sur les fonctions

Les théorèmes concernant la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux fonctions peuvent se résumer dans le tableau ci-dessous où x_0, a et b sont des réels. Ces résultats restent applicables à des limites à gauche ou à droite ou à des limites en l'infini.

Si		**alors**		
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x).g(x))$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
a	b	$a+b$	ab	$\dfrac{a}{b}$ si $b \neq 0$ $\pm\infty$ si $a > 0$ et $b = 0^\pm$ $\mp\infty$ si $a < 0$ et $b = 0^\pm$ indétermination si $a = b = 0$
a	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ si $a > 0$ $\mp\infty$ si $a < 0$ indétermination si $a = 0$	0
$\pm\infty$	b	$\pm\infty$	$\pm\infty$ si $b > 0$ $\mp\infty$ si $b < 0$ indétermination si $b = 0$	$\pm\infty$ si $b > 0$ ou $b = 0^+$ $\mp\infty$ si $b < 0$ ou $b = 0^-$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	indétermination
$\pm\infty$	$\mp\infty$	indétermination	$-\infty$	indétermination

Cas des fonctions composées

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ et } g \text{ sont composables} \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \\ \lim\limits_{y\to b} f(x) = c \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = c.$$

Remarque : x_0, b, c désignent soit un réel, soit ∞, $+\infty$ ou $-\infty$ et on peut considérer des limites à gauche ou à droite.

5.3.3 Limites à gauche et à droite

• Si la limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe (finie ou non) alors les limites $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ existent et on a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

• Si $x_0 \in$dom(f) et si les limites $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ existent et sont égales à $f(x_0)$ alors la limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut aussi $f(x_0)$.

• Si $x_0 \notin$dom(f) et si les limites $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ existent et sont égales alors la limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et on a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

5.3.4 Limite et inégalités entre fonctions

Soient a, b des réels, x_0 un réel ou l'infini et deux fonctions f et g.

• Si $\left\{ \begin{array}{l} f < g \text{ ou } f \leq g \text{ au voisinage de } x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b \end{array} \right.$ alors $a \leq b$.

• Théorème de l'étau.

1. Soient a un réel, x_0 un réel ou l'infini et trois fonctions f, g et h.

   Si $\left\{ \begin{array}{l} g \leq f \leq h \text{ au voisinage de } x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a \end{array} \right.$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

2. Soient x_0 un réel ou l'infini et deux fonctions f et g.

   Si $\left\{ \begin{array}{l} f \leq g \text{ au voisinage de } x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ (resp. } \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty) \end{array} \right.$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$)

5.3.5 Théorème de l'Hospital

Ce théorème est très utile pour le calcul des limites car il permet de lever de nombreuses indéterminations. Comme il nécessite le calcul de dérivées, il sera énoncé dans le cadre de ce chapitre.

5.4 Limites de référence

Voici quelques résultats souvent utilisés.

$\boxed{\textbf{Limite en un réel } \mathbf{x_0}}$

$\lim\limits_{x \to x_0} C = C$ où C est une constante

$\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$ avec $n \in \mathbb{N}_0$

$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ avec $\left\{ \begin{array}{l} x_0 \geq 0 \text{ si } n \text{ pair} \in \mathbb{N}_0 \\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ si } n \text{ impair} \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$

$\lim\limits_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$

$\lim\limits_{x \to x_0} \text{tg}(x) = \text{tg}(x_0)$ si $x_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\lim\limits_{x\to x_0} \text{cotg}(x) = \text{cotg}(x_0)$ si $x_0 \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \text{tg}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \text{tg}(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \text{cotg}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{cotg}(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}(x)}{x} = 1$

Limite en l'infini

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} C = C$ où C est une constante

$$\lim_{x\to \pm\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ pair } \in \mathbb{N}_0 \\ \pm\infty \text{ si } n \text{ impair } \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ si n pair $\in \mathbb{N}_0$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \sqrt[n]{x} = \pm\infty$ si n impair $\in \mathbb{N}_0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$

Soient P et Q deux polynômes de degrés respectifs n et p tels que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{et} \quad Q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} \ldots + b_1 x + b_0.$$

On a alors

- $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, x_0 étant un réel
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} a_n x^n = \infty$, le signe étant celui du produit $a_n x^n$
- $$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_p} \text{ si } n = p \\ 0 \text{ si } n < p \\ \infty \text{ si } n > p, \text{ le signe étant celui du quotient } \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p} \end{cases}$$

5.5 Asymptotes

5.5.1 Asymptote verticale

Soient $x_0 \in \,]a, b[$ et f une fonction définie sur $]a, b[\setminus\{x_0\}$ (x_0 réel, a, b réels ou infinis).

La droite d'équation cartésienne $x = x_0$ est asymptote verticale à gauche (resp. à droite) au graphique de f si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$).

5.5.2 Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur $]a, +\infty[$ (a réel ou infini).

La droite d'équation cartésienne $y = mx + p$ est asymptote oblique en $+\infty$ au graphique de f si $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0$.
De façon analogue, si f une fonction définie sur $]-\infty, a[$, la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote

oblique en $-\infty$ au graphique de f si $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+p))=0$.

On démontre que f défini sur $]a,+\infty[$ admet la droite d'équation $y=mx+p$ comme asymptote oblique en $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=p$.
On a un résultat analogue en $-\infty$.

5.5.3 Asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur $]a,+\infty[$ (a réel ou infini).

La droite d'équation cartésienne $y=b$ est asymptote horizontale en $+\infty$ au graphique de f si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ ($b\in\mathbb{R}$).

Remarques :
1. On définit, de façon analogue, une asymptote horizontale en $-\infty$ au graphique de f.
2. Une asymptote horizontale est un cas particulier des asymptotes obliques ($a=0$). Dans la pratique, on ne parle d'asymptote oblique que si $a\neq 0$.

5.6 Continuité

5.6.1 Définition

Soient f une fonction définie sur $A\subset\mathbb{R}$ et x_0 un réel de A.

La fonction f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ existe.
Cette limite est alors nécessairement finie et égale à $f(x_0)$.

5.6.2 Propriétés

• Les fonctions élémentaires (polynôme, fraction rationnelle, racine n^{eme}, valeur absolue, fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses, exponentielle et logarithme) sont continues sur leur domaine de définition.

• Toute combinaison linéaire de fonctions continues est une fonction continue.

• Tout produit de fonctions continues est une fonction continue.

• Si f est une fonction continue et non nulle en tout point de A alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur A.

• Si f est une fonction continue sur A et si g est une fonction continue sur B telle que $\{g(x) : x\in B\}\subset A$ alors la fonction $f\circ g$ est continue sur B.

5.7 Quelques exercices résolus

5.7.1 Limite en un réel

Si elles existent, calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to -2}(2x^2-5x+1)$
2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

   si $f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad x<2 \\ 1 & \text{si} \quad x=2 \\ 5x-10 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$
3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x+1}{x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{4x^2+7x-2}$
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-2\sin(x)}{\cos(x)}$
6. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}} \dfrac{4x^2-3x-1}{4x^3+x^2-16x-4}$
7. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{2x^3+4x^2+2x}$
8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-\cos(3x)}{\cos(4x)-\cos(6x)}$
11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \exp(\operatorname{arctg}(x^2+1))$

1) La fonction est définie sur $A=\mathbb{R}$. Comme tout intervalle ouvert comprenant -2 rencontre A, la limite en -2 a un sens et vaut $2(-2)^2-5(-2)+1=19$.

2) La fonction est définie sur $A=\mathbb{R}$. Comme tout intervalle ouvert comprenant 2 rencontre A, la limite en 2 a un sens. 0n a $\lim\limits_{x\to 2^-}(-x+2)=0$ et $\lim\limits_{x\to 2^+}(5x-10)=0$ mais comme f est défini en 2 et que $f(2)=1\neq 0$, la limite en 2 n'existe pas.

3) La fonction est définie sur $A=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. Comme tout intervalle ouvert comprenant 3 rencontre A, la limite en 3 a un sens. On a $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)=7$ et $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$. Dès lors, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{x-3}=\infty$ et plus précisément, $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x+1}{x-3}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x+1}{x-3}=+\infty$ vu le signe de la fraction au voisinage de 3.

4) La fonction est définie sur $A=\{x\in\mathbb{R} : 4x^2+7x-2\geq 0\}=\,]-\infty,-2]\cup[\frac{1}{4},+\infty[$. Comme l'intervalle $]-1,1/5[$, par exemple, comprend 0 mais ne rencontre pas A, la limite en 0 n'a pas de sens.

5) La fonction est définie sur $A=\{x\in\mathbb{R} : \cos(x)\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$. Comme tout intervalle ouvert comprenant $\frac{\pi}{2}$ rencontre A, la limite en $\frac{\pi}{2}$ a un sens. On a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-2\sin(x))=-1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos(x)=0$. Dès lors, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-2\sin(x)}{\cos(x)}=\infty$ et plus précisément, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1-2\sin(x)}{\cos(x)}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1-2\sin(x)}{\cos(x)}=+\infty$ vu le signe de la fraction au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

6) La fonction est définie sur $A=\{x\in\mathbb{R} : 4x^3+x^2-16x-4\neq 0\}$. Comme $4x^3+x^2-16x-4=(4x+1)(x-2)(x+2)$, on a $A=\mathbb{R}\setminus\{-2,-\frac{1}{4},2\}$. Comme tout intervalle ouvert comprenant $-\frac{1}{4}$ rencontre A, la limite en $-\frac{1}{4}$ a un sens. 0n a $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}}(4x^2-3x-1)=\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}}(4x^3+x^2-16x-4)=0$. Pour lever l'indétermination, il suffit de simplifier la fraction par $4x+1$, facteur commun au numérateur et au dénominateur. Dès lors, on a

$$\lim_{x\to -\frac{1}{4}} f(x)=\lim_{x\to -\frac{1}{4}}\frac{(4x+1)(x-1)}{(4x+1)(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -\frac{1}{4}}\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}=\frac{-\frac{1}{4}-1}{(-\frac{1}{4}-2)(-\frac{1}{4}+2)}=\frac{20}{63}.$$

7) La fonction est définie sur $A=\{x\in\mathbb{R} : 2x^3+4x^2+2x\neq 0\}$. Comme $2x^3+4x^2+2x=2x(x^2+2x+1)=2x(x+1)^2$, on a $A=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant -1 rencontre A, la limite en

-1 a un sens. 0n a $\lim\limits_{x\to-1}(x^3+5x^2+8x+4)=\lim\limits_{x\to-1}(2x^3+4x^2+2x)=0$. Pour lever l'indétermination, il suffit de simplifier la fraction par $x+1$, facteur commun au numérateur et au dénominateur. Dès lors, on a $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+2)^2(x+1)}{2x(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+2)^2}{2x(x+1)}=\infty$, la limite du numérateur étant égale à 1 et celle du dénominateur égale à 0. Plus précisément, on a $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$ vu le signe de la fraction au voisinage de -1.

8) La fonction est définie sur $A=\{x\in\mathbb{R} : x+2\geq 0, \sqrt{x+2}-2\neq 0\}=[-2,2[\,\cup\,]2,+\infty[$ puisque $\sqrt{x+2}-2\neq 0\Leftrightarrow x+2\neq 4$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 2 rencontre A, la limite en 2 a un sens. 0n a $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=\lim\limits_{x\to2}(\sqrt{x+2}-2)=0$. Pour lever l'indétermination, il suffit de simplifier la fraction par $x-2$ après avoir multiplié numérateur et dénominateur par le binôme conjugué du dénominateur. Dès lors, on a $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4}=\lim\limits_{x\to2}(\sqrt{x+2}+2)=4$.

9) La fonction est définie sur $A=\{x\in\mathbb{R} : x^2\neq 0\}=\mathbb{R}_0$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre A, la limite en 0 a un sens. 0n a $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos(2x))=\lim\limits_{x\to0}x^2=0$. Pour lever l'indétermination, on transforme la fraction par application d'une formule de trigonométrie.
On a $\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}=\dfrac{2\sin^2(x)}{x^2}=2\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2$ et comme $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$, la limite cherchée vaut 2.

10) La fonction est définie sur $A=\{x\in\mathbb{R} : \cos(4x)-\cos(6x)\neq 0\}$. Comme l'équation $\cos(4x)=\cos(6x)$ a pour solutions $x=\frac{k\pi}{5}$ $(k\in\mathbb{Z})$, la fonction est donc définie sur $A=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{5} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre A, la limite en 0 a donc un sens et on a $\lim\limits_{x\to0}(\cos(x)-\cos(3x))$ $=\lim\limits_{x\to0}(\cos(4x)-\cos(6x))=0$. Pour lever l'indétermination, on transforme la fraction par application des formules de Simpson. On a successivement

$$\frac{\cos(x)-\cos(3x)}{\cos(4x)-\cos(6x)}=\frac{-2\sin(2x)\sin(-x)}{-2\sin(5x)\sin(-x)}=\frac{\sin(2x)}{\sin(5x)}=\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{2}{5}$$

Dès lors, comme $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$, la limite cherchée vaut $\dfrac{2}{5}$.

11) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$; la limite en $\frac{\pi}{2}$ a donc un sens et vaut $\exp(\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\pi^2}{4}+1\right))$.

5.7.2 Limite en l'infini

Si elles existent, calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions $f : A\to\mathbb{R} : x\mapsto f(x)$ si

1. $f(x)=5x^3-2x^2+x-2$
2. $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2+x+1}$
3. $f(x)=\dfrac{-x^3+x-2}{3x}$
4. $f(x)=\dfrac{7x+2}{x^2+2x+1}$
5. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{2x}$
6. $f(x)=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x^2+2x}$
7. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}-x$
8. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}-x}{x}$
9. $f(x)=\cos(x)$
10. $f(x)=x+\sin(x)$
11. $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$
12. $f(x)=\mathrm{arcotg}\left(\dfrac{2x^2+1}{1-x}\right)$

1) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non borné ; les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ont donc un sens. Comme la limite d'un polynôme en l'infini est égale à la limite de son terme de plus haute puissance, on

a $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-2x^2+x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}5x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^3-2x^2+x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}5x^3=+\infty$.

2) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ puisque $\Delta=1-12<0$. Cet ensemble n'étant pas borné, les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ont donc un sens. Comme la limite d'un polynôme en l'infini est égale à la limite de son terme de plus haute puissance, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$ et on obtient le même résultat en $+\infty$.

3) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non borné ; les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ont donc un sens. Comme la limite d'un polynôme en l'infini est égale à la limite de son terme de plus haute puissance, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3+x-2}{3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3}{3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2}{3}=-\infty$ et on obtient le même résultat en $+\infty$.

4) La fonction est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, ensemble non borné ; les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ont donc un sens. Comme la limite d'un polynôme en l'infini est égale à la limite de son terme de plus haute puissance, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+2}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7}{x}=0$ et on obtient le même résultat en $+\infty$.

5) La fonction est définie sur $A=\{x\in\mathbb{R}: x-3\geq 0,\ 2x\neq 0\}=[3,+\infty[$. Cet ensemble est minoré mais non majoré ; la limite en $-\infty$ n'a donc pas de sens mais on peut calculer la limite en $+\infty$. Ainsi, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-3}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0$.

6) La fonction est définie sur $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2-1\geq 0,\ 2x^2+2x\geq 0\}=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, ensemble non borné ; les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ont donc un sens. En calculant les limites en $-\infty$ ou en $+\infty$, on arrive à une indétermination du type $\infty-\infty$.
Pour x suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x^2+2x})&=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2}-\sqrt{2x^2})=\lim_{x\to-\infty}(|x|-\sqrt{2}|x|)\\&=\lim_{x\to-\infty}(-x+\sqrt{2}x)=\lim_{x\to-\infty}((\sqrt{2}-1)x)=-\infty.\end{aligned}$$

Pour x suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x^2+2x})&=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2}-\sqrt{2x^2})=\lim_{x\to+\infty}(|x|-\sqrt{2}|x|)\\&=\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{2}x)=\lim_{x\to+\infty}((1-\sqrt{2})x)=-\infty.\end{aligned}$$

7) La fonction est définie sur $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2-3x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}:(x-1)(x-2)\geq 0\}=]-\infty,1]\cup[2,+\infty[$, ensemble non borné ; les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ont donc un sens.
En $-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2}-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(|x|-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$.
En $+\infty$, on arrive à une indétermination du type $\infty-\infty$. La mise en évidence des plus hautes puissances de x conduit à une nouvelle forme indéterminée, $0\ .\ \infty$; il nous faut donc procéder différemment en multipliant numérateur et dénominateur par le binôme conjugué du numérateur. Ainsi, on a

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-3x+2}-x)(\sqrt{x^2-3x+2}+x)}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-3x+2)}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{|x|+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{2x}=\frac{-3}{2}.$$

8) La fonction est définie sur $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2-4\geq 0, x\neq 0\}=]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$, ensemble non borné ; les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ont donc un sens.
En $-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}-x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|-x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{x}=-2$.
En $+\infty$, on arrive à une indétermination du type $\infty-\infty$ au numérateur. Pour lever l'indétermination, on multiplie numérateur et dénominateur par le binôme conjugué du numérateur. Ainsi, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4}-x)(\sqrt{x^2-4}+x)}{x(\sqrt{x^2-4}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x(|x|+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{2x^2}=0$$

9) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non borné ; les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ont donc un sens. Considérons les suites $x_m = 2m\pi$ et $y_m = \frac{\pi}{2} + 2m\pi,\ m \in \mathbb{N}$. Ces suites tendent vers $+\infty$ lorsque m tend vers $+\infty$. La suite $f(x_m) = \cos(2m\pi) = 1\ \forall m$ converge vers 1 tandis que la suite $f(y_m) = \cos(\frac{\pi}{2}+2m\pi) = 0\ \forall m$ converge vers 0. On conclut donc que la limite en $+\infty$ de la fonction n'existe pas.
On conclut de façon semblable pour la limite en $-\infty$.

10) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non borné ; les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ont donc un sens. On sait que $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq x+\sin(x) \leq x+1$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$, par application du théorème de l'étau, on conclut que $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sin(x)) = -\infty$.
Par un raisonnement analogue, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin(x)) = +\infty$.

11) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non borné ; les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ont donc un sens. On sait que $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin(x) \leq 1$. Si $x < 0$, on a alors $\dfrac{-1}{x} \geq \dfrac{\sin(x)}{x} \geq \dfrac{1}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, par application du théorème de l'étau, on conclut que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.
Par un raisonnement analogue, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

12) La fonction est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, ensemble non borné ; les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ ont donc un sens.
En $-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}\operatorname{arcotg}(y) = 0$. Dès lors, par application du théorème des limites des fonctions composées, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcotg}\left(\dfrac{2x^2+1}{1-x}\right) = 0$.
En $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty}\operatorname{arcotg}(y) = \pi$. Dès lors, par application du théorème des limites des fonctions composées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arcotg}\left(\dfrac{2x^2+1}{1-x}\right) = \pi$.

5.7.3 Asymptotes

1. Déterminer les asymptotes éventuelles au graphique de $f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ si
   1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$
   2. $f(x) = x+1+\dfrac{1}{2x-3}$
   3. $f(x) = \dfrac{x^2-x+3}{x-1}$
   4. $f(x) = 2x+\sqrt{4x^2-9}$

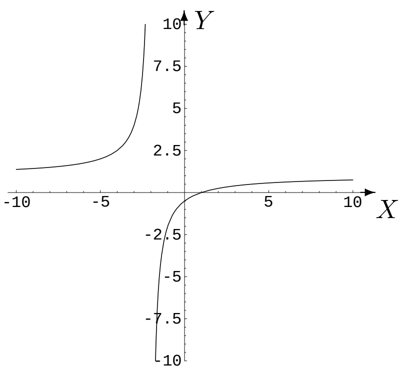
1) La fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale au graphique de f. En effet, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$.
La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ au graphique de f. En effet, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$.
Pour déterminer la position du graphique par rapport à cette droite au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), il suffit d'étudier le signe de $f(x)-2$ pour des x suffisamment grands (resp. petits). Comme $f(x)-2 = \dfrac{2x+1}{x-2} - 2 = \dfrac{5}{x-2}$, au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) cette différence est positive (resp. négative). Le graphique de la fonction se trouve donc au-dessus (resp. en dessous) de l'asymptote.

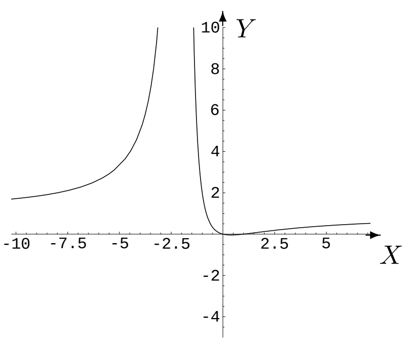
2) La fonction $f : x \mapsto f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{2x-3}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.
La droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ est asymptote verticale au graphique de f. En effet, $\displaystyle\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty$.
La droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ au graphique de f. En effet, $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{2x-3} = 0^{\pm}$.
De plus, comme la différence $f(x) - (x+1)$ est positive (resp. négative) au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), le graphique de f se trouve donc au-dessus (resp. en dessous) de l'asymptote.
Il n'y a pas d'asymptote horizontale.

3) La fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x-1} = \dfrac{x(x-1)+3}{x-1} = x + \dfrac{3}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
L'exercice est alors analogue à celui qui précède. On a une asymptote verticale d'équation $x = 1$ et une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = x$.
Il n'y a pas d'asymptote horizontale.

4) La fonction $f : x \mapsto f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 - 9}$ est définie sur $\left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.
Vu le domaine de définition, il n'y a pas d'asymptote verticale.
En $-\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 4x^2 + 9}{2x - \sqrt{4x^2 - 9}} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{9}{2x - |2x|} = 0$ et on a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$, donc pas d'asymptote oblique. Comme $f(x) < 0$ pour x suffisamment petit, le graphique de f est situé en dessous de l'asymptote.
En $+\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x + |2x|) = +\infty$: il n'y a donc pas d'asymptote horizontale en $+\infty$. Par contre, la fonction admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = 4x$. En effet, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x + |2x|}{x} = 4$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 - 9} - 2x)$ $\displaystyle= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 9 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 9} + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{-9}{|2x| + 2x} = 0$. Comme $f(x) - 4x < 0$ pour x suffisamment grand, le graphique de f est situé en dessous de l'asymptote.

2. Associer chacun des deux graphiques suivants à l'une des expressions analytiques des fonctions suivantes
$f_1 : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+2}$ $\qquad f_2 : x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$ $\qquad f_3 : x \mapsto \dfrac{x-1}{x(x+2)}$ $\qquad f_4 : x \mapsto \dfrac{x(x-1)}{(x+2)^2}$





Le graphique de droite passe par l'origine du repère et la seule fonction dont le graphique passe par ce point est la fonction f_4. Cette fonction possède bien une asymptote verticale d'équation $x = -2$ et on a

$\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$. De plus, cette fonction admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = 1$. Dès lors, le graphique de droite est bien celui de la fonction f_4.

Le graphique de gauche est celui d'une fonction qui admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$ et une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = 1$. Ce n'est pas le cas de la fonction f_2 qui admet une asymptote oblique, ni celui de f_3 qui admet 2 asymptotes verticales. Par contre, la fonction f_1 a une asymptote verticale d'équation $x = -2$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. De plus, $\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$. Dès lors, le graphique de gauche est bien celui de la fonction f_1.

5.8 Quelques exercices à résoudre ... et leurs solutions

5.8.1 Exercices

1. Si elles existent, calculer les limites suivantes

   1. $\lim_{x\to\pm\infty} (x-1)^3$
   2. $\lim_{x\to\pm\infty} (2x^3 + 4x^2 - 6x^5 + 7)$
   3. $\lim_{x\to\pm\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + x - 3})$
   4. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{4x^3 - 5x^2 + 1}$
   5. $\lim_{x\to\pm\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{4x^3 - 5x^2 + 1}$
   6. $\lim_{x\to\pm 1} \dfrac{4x^2 - 1}{4x^3 - 5x^2 + 1}$
   7. $\lim_{x\to(-1)^+} \dfrac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$
   8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$
   9. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x+3}$
   10. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x+3}$
   11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{\mathrm{tg}(x)}$
   12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x) - \sin(2x)}{\sin(3x) - \sin(x)}$
   13. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{4\mathrm{tg}(x)}{1 + \frac{1}{\cos(x)}}$
   14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{x^2}$
   15. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 + \sin(x)}{\cos^2(x)}$
   16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos(x) + e^{-x}}{x^2}$
   17. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\mathrm{arctg}(x)}$
   18. $\lim_{x\to 0} e^{-x}\sin(x)$
   19. $\lim_{x\to +\infty} \mathrm{arctg}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$
   20. $\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^\pm} \exp(\mathrm{tg}(x))$

2. Déterminer les éventuelles asymptotes au graphique des fonctions suivantes

   1. $f(x) = \dfrac{3}{1-2x}$
   2. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5x + 1}{x+1}$
   3. $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)}$
   4. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$
   5. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}$
   6. $f(x) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   7. $f(x) = \mathrm{arcotg}(\sqrt{x})$
   8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \arcsin \dfrac{2x-1}{2x+1}$

5.8.2 Solutions

Exercice 1

1. En $-\infty : -\infty$; en $+\infty : +\infty$
2. En $-\infty : +\infty$; en $+\infty : -\infty$
3. En $-\infty : -\infty$; en $+\infty : -\frac{1}{4}$
4. En $-\infty : 0$; en $+\infty : 0$
5. En $-\frac{1}{2} : 0$; en $\frac{1}{2} : 0$
6. En $-1 : -\frac{3}{8}$; en $1 : \infty$ (en $1^- : -\infty$; en $1^+ : +\infty$)
7. $+\infty$
8. $\frac{1}{8}$
9. En $-\infty : -1$; en $+\infty : 1$
10. Cette limite n'a pas de sens.
11. 4
12. 1
13. 4
14. $+\infty$
15. $+\infty$
16. $+\infty$
17. $+\infty$
18. 0
19. $\frac{\pi}{4}$
20. En $\frac{\pi}{2}^- : +\infty$; en $\frac{\pi}{2}^+ : 0$

Exercice 2

1. AV : $x = \frac{1}{2}$ et AH en $\pm\infty : y = 0$
2. AV : $x = -1$ et AO en $\pm\infty : y = 4x - 9$
3. AO en $-\infty : y = -x + 1$ et
   AO en $+\infty : y = x - 1$
4. AH en $-\infty : y = 0$ et AO en $+\infty : y = 2x$
5. AV en $1^+ : x = 1$ et AV en $5^- : x = 5$
6. AH en $\pm\infty : y = 0$
7. AH en $+\infty : y = 0$
8. AV en $0^+ : x = 0$ et AH en $+\infty : y = 0$

Chapitre 6

Dérivation de fonction

6.1 Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de cet intervalle.
Cette **fonction** est **dérivable en** x_0 si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe et est finie.}$$

Ce réel est noté $Df(x_0)$ et est appelé **dérivée de** f **au point** x_0 ou encore nombre dérivé de f en x_0.

Une **fonction** f est **dérivable dans un intervalle ouvert** I de $\mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout point de I. On définit alors la fonction

$$Df : I \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

appelée fonction dérivée de f ou encore **dérivée de** f.

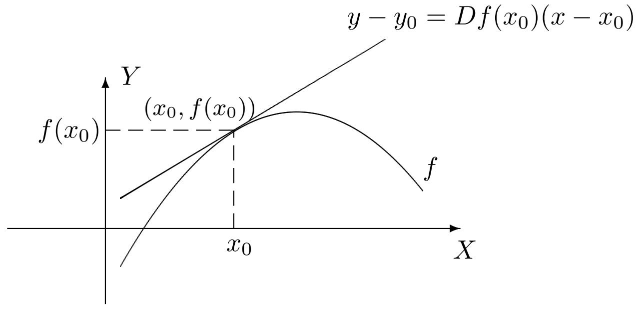
Le sous-ensemble des points du domaine de définition d'une fonction en lesquels elle est dérivable est le **domaine de dérivabilité** de cette fonction.

Remarque : on définit les notions de dérivée de f à gauche et à droite de x_0 de façon analogue aux définitions des limites à gauche et à droite de x_0.

6.2 Interprétation géométrique

Si la fonction f est dérivable en x_0, le graphique de f admet une **tangente** au point P de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ dont le coefficient angulaire vaut $Df(x_0)$. Cette droite a donc pour équation cartésienne

$$\boxed{y - y_0 = Df(x_0)(x - x_0).}$$



6.3 Lien entre dérivabilité et continuité

Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.
La réciproque de cette propriété est fausse car, par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

6.4 Dérivée des fonctions élémentaires

6.4.1 Fonctions dont les domaines de définition et de dérivabilité sont égaux

Fonction	Domaines	Dérivée
k (constante)	$\mathbb{R}$	0
x^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\mathrm{tg}(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathrm{cotg}(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\dfrac{-1}{\sin^2(x)}$
$\mathrm{arctg}(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x^2+1}$
$\mathrm{arcotg}(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{-1}{x^2+1}$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{x}$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$\log_a(x)$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{x\ln(a)}$
a^x $(a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a).a^x$
x^a $(a \in \mathbb{R})$	$]0, +\infty[$	ax^{a-1}

6.4.2 Fonctions dont les domaines de définition et de dérivabilité diffèrent

Fonction	Dom. de définition	Dom. de dérivabilité	Dérivée
$\lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_0$	$\begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
$\sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\})$	$\begin{cases} [0, +\infty[& \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$	$\begin{cases}]0, +\infty[& \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{R}_0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

6.5 Dérivée et opérations sur les fonctions

Si f et g sont des fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ alors

- la fonction $f+g$ est dérivable sur I et on a $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x),\ x \in I$
- la fonction $f.g$ est dérivable sur I et on a $D(f.g)(x) = Df(x).g(x) + f(x).Dg(x),\ x \in I$
  en particulier, si $r \in \mathbb{R}$, on a $D(rf(x)) = rDf(x),\ x \in I$
- la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $J = I \setminus \{x \in I : g(x) = 0\}$ et on a
$$D\left(\frac{f}{g}(x)\right) = \frac{Df(x).g(x) - f(x).Dg(x)}{g^2(x)},\ x \in J$$

- **Fonction composée** :

Si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert } J \\ g \text{ est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert } I \text{ telle que } \{g(x) : x \in I\} \subset J \end{array}\right.$

alors la fonction $F = f \circ g$ est dérivable sur I et on a $D(f \circ g)(x) = (Df)(g(x))\ Dg(x)$.

- **Fonction inverse** :

Soient I et$J$ deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.
Si $f : I \to J$ est une bijection dérivable telle que $Df(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors la fonction inverse $f^{-1} : J \to I$ est dérivable sur J et on a $Df^{-1}(x) = \dfrac{1}{Df(y)}$, avec $y = f^{-1}(x)$.

6.6 Dérivées multiples

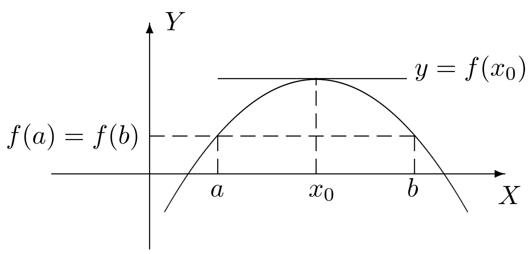
La dérivée d'une fonction sur un intervalle ouvert I est aussi appelée dérivée d'ordre 1 de cette fonction ou dérivée première.
Une **fonction** est **deux fois dérivable** sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée Df est encore dérivable sur I. La dérivée de la dérivée, notée $D^2 f$, est appelée dérivée d'ordre 2 de cette fonction ou dérivée seconde.
De façon analogue, on pourrait introduire les notions de fonction p ($p \in \mathbb{N}_0$) fois dérivable et de dérivée d'ordre p d'une fonction f notée $D^p f$.

6.7 Propriétés des dérivées

6.7.1 Théorème de Rolle

Soient a, b deux réels tels que $a < b$.
Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $Df(x_0) = 0$.

Interprétation graphique : dans les conditions de l'énoncé, il existe au moins un point de l'intervalle sur lequel on travaille en lequel la tangente au graphique de la fonction considérée est parallèle à l'axe des abscisses.

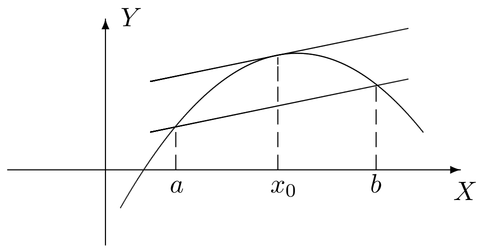


6.7.2 Théorème des accroissements finis (TAF)

Soient a, b deux réels tels que $a < b$.
Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que

$$Df(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interprétation graphique : dans les conditions de l'énoncé, il existe au moins un point de l'intervalle sur lequel on travaille en lequel la tangente au graphique de la fonction considérée est parallèle à la droite passant par les points du graphique de la fonction dont les abscisses sont a et b.



6.7.3 Théorème de l'Hospital

Soit V un intervalle ouvert de a (a réel ou ∞).

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ f \text{ et } g \text{ sont des fonctions dérivables sur } V \\ \bullet\ Dg \text{ diffère de 0 en tout point de } V \\ \bullet\ \lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ (ou } \lim_{x\to a} g(x) = \infty) \\ \bullet\ \lim_{x\to a} \dfrac{Df(x)}{Dg(x)} = b \text{ (} b \text{ pouvant être réel ou infini)} \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

6.7.4 Croissance et décroissance

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
• f est croissant sur $I \Leftrightarrow Df$ est une fonction positive sur I.
• Si DF est **strictement** positif sur I alors f est **strictement** croissant sur I.

• f est décroissant sur $I \Leftrightarrow Df$ est une fonction négative sur I.
• Si DF est **strictement** négatif sur I alors f est **strictement** décroissant sur I.

Remarque : dans le cas de la stricte croissance ou décroissance, la réciproque de la propriété énoncée ci-dessus est fausse.

6.7.5 Maximum et minimum

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.
• Si x_0 est un extremum (maximum ou minimum) local de f sur I alors $Df(x_0) = 0$.
• S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Df(x) > 0\ \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$ et $Df(x) < 0\ \forall x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$ alors x_0 est un maximum local strict de f dans I.
• S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Df(x) < 0\ \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$ et $Df(x) > 0\ \forall x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$ alors x_0 est un minimum local strict de f dans I.

Remarque : les propriétés ci-dessus relatives à un maximum et à un minimum restent vraies pour une fonction dérivable sur I sauf en x_0 et continue sur I.

6.7.6 Dérivée seconde et concavité

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
• f est convexe sur $I \Leftrightarrow D^2 f$ est une fonction positive sur I.
• f est concave sur $I \Leftrightarrow D^2 f$ est une fonction négative sur I.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

Le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** au graphique de f s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit convexe (resp. concave) sur $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ et concave (resp. convexe) sur $]x_0, x_0 + \varepsilon[$.
Si une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ admet $(x_0, f(x_0))$ comme point d'inflexion alors sa dérivée seconde en x_0 est nulle.

6.8 Représentation graphique d'une fonction : plan d'étude

1. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité.
2. Examiner si la fonction est paire, impaire, périodique.
3. Déterminer les zéros de la fonction.
4. Etudier la fonction aux extrémités du domaine de définition de la fonction (limites, asymptotes).
5. Etudier la monotonie (étude du signe de la dérivée première) et la concavité (étude du signe de la dérivée seconde) de la fonction.
6. Construire un tableau reprenant tous les renseignements obtenus ci-dessus.
7. Représenter le graphique de la fonction sans oublier de mentionner le nom des axes et les unités sur chacun d'eux.

6.9 Quelques exercices résolus

6.9.1 Calcul de dérivées

Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes puis calculer leur dérivée

1. $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + x - 1$
2. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2}$
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$
5. $f(x) = |2x^2 + 3x - 5|$
6. $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$
7. $f(x) = \mathrm{tg}^3\left(\dfrac{\pi}{8} - 4x\right)$

1) Les deux domaines sont égaux à $\mathbb{R}$. Comme la dérivée d'une somme de fonctions dérivables est la somme des dérivées de ces fonctions et que la dérivée d'un multiple d'une fonction est le multiple de la dérivée de la fonction, on a $Df(x) = 5Dx^3 - 2Dx^2 + Dx - D1$. De plus, puisque $Dx^n = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, on obtient $Df(x) = 15x^2 - 4x + 1$, la dérivée d'une constante étant nulle.

2)Les deux domaines sont égaux à $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. En appliquant la formule de dérivation d'un quotient, on a

$$\begin{aligned} Df(x) &= \frac{D(2x^2 - 3x + 1).(x + 2) - (2x^2 - 3x + 1).D(x + 2)}{(x + 2)^2} = \frac{(4x - 3).(x + 2) - (2x^2 - 3x + 1).1}{(x + 2)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 5x - 6 - 2x^2 + 3x - 1}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 8x - 7}{(x + 2)^2}. \end{aligned}$$

3) On a $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0, \frac{x}{x^2-1} \geq 0\} =]-1, 0] \cup]1, +\infty[$ tandis que le domaine de dérivabilité est $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0, \frac{x}{x^2-1} > 0\} =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$. C'est une fonction composée construite comme suit : $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1} \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$. Dès lors, on a

$$Df(x) = D_Y \sqrt{Y}|_{Y=\frac{x}{x^2-1}} \ . \ D\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}} \ . \ \frac{1.(x^2-1) - x.2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x}} \ . \ \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}.$$

4) Le domaine de définition de cette fonction est $\mathbb{R}$ et son domaine de dérivation est $\{x \in \mathbb{R} : x^3 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. C'est une fonction composée construite comme suit : $x \mapsto x^3 - x \mapsto \sqrt[3]{x^3 - x}$.

Dès lors, on a $Df(x) = D_Y \sqrt[3]{Y}|_{Y=x^3-x} \ . \ D(x^3 - x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^3-x)^2}} \ . \ (3x^2 - 1) = \dfrac{3x^2 - 1}{3\sqrt[3]{(x^3-x)^2}}$.

5) Le domaine de définition de cette fonction est $\mathbb{R}$. Comme les zéros de $2x^2 + 3x - 5 = (2x+5)(x-1)$ sont $-\frac{5}{2}$ et 1, le domaine de dérivabilité de f est $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, 1\}$. Vu le signe de $2x^2 + 3x - 5$, la fonction peut s'écrire $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 & \text{si} \quad x \leq -\frac{5}{2} \text{ ou } x \geq 1 \\ -2x^2 - 3x + 5 & \text{si} \quad -\frac{5}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ et dès lors, on a

$$Df(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{si} \quad x < -\frac{5}{2} \text{ ou } x > 1 \\ -4x - 3 & \text{si} \quad -\frac{5}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

6) Les deux domaines sont égaux à $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) - \cos(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$. En appliquant la formule de dérivation d'un quotient, on a

$$\begin{aligned} Df(x) &= \frac{D(\sin(x) + \cos(x)) \ . \ (\sin(x) - \cos(x)) - (\sin(x) + \cos(x)) \ . \ D(\sin(x) - \cos(x))}{(\sin(x) - \cos(x))^2} \\ &= \frac{(\cos(x) - \sin(x)) \ . \ (\sin(x) - \cos(x)) - (\sin(x) + \cos(x)) \ . \ (\cos(x) + \sin(x))}{(\sin(x) - \cos(x))^2} \\ &= \frac{-2\sin^2(x) - 2\cos^2(x)}{(\sin(x) - \cos(x))^2} = \frac{-2}{(\sin(x) - \cos(x))^2}. \end{aligned}$$

7) Les deux domaines sont égaux à $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{\pi}{8} - 4x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-3\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}$. C'est une fonction composée construite comme suit : $x \mapsto \dfrac{\pi}{8} - 4x \mapsto \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} - 4x\right) \mapsto \text{tg}^3\left(\dfrac{\pi}{8} - 4x\right)$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned} Df(x) &= D_Z Z^3|_{Z=\text{tg}(\frac{\pi}{8}-4x)} \ . \ D_Y \text{tg}(Y)_{Y=\frac{\pi}{8}-4x} \ . \ D\left(\frac{\pi}{8} - 4x\right) = 3 \ \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{8} - 4x\right) \ . \ \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{8} - 4x)} \ . \ (-4) \\ &= \frac{-12\sin^2\left(\frac{\pi}{8} - 4x\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{8} - 4x\right)}. \end{aligned}$$

6.9.2 Applications du théorème de l'Hospital

Si elles existent, calculer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}(x) - x}{x - \sin(x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 - 3x)^{\frac{-2}{x}}$
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln(x)$
4. $\displaystyle\lim_{x \to \pi^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x - \pi}}$
5. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
6. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x\ln(x)}{x + \ln(x)}$

1) La fonction est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \sin(x),\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\}$. Comme tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre le domaine de définition de la fonction, la limite en 0 a un sens. Pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$, on applique le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées. En effet, si $f(x) = \mathrm{tg}(x) - x$ et $g(x) = x - \sin(x)$, ces deux fonctions sont dérivables dans un intervalle ouvert V comprenant 0, $Dg(x) = 1 - \cos(x) \neq 0$ dans $V \setminus \{0\}$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$. De plus, comme

$$\lim_{x\to 0} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to 0}(1 + \cos(x)) = 2,$$

la limite demandée vaut 2.

2) La fonction $(1 - 3x)^{\frac{-2}{x}} = \exp(\frac{-2}{x} \ln(1 - 3x))$ est définie sur $]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, \frac{1}{3}[$. Comme tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre le domaine de définition de la fonction, la limite en 0 a un sens. Pour lever l'indétermination $\infty.0$ de $\lim_{x\to 0} \dfrac{-2}{x} \ln(1 - 3x)$, on applique le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées. En effet, si $f(x) = -2\ln(1 - 3x)$ et $g(x) = x$, ces deux fonctions sont dérivables dans un intervalle ouvert V comprenant 0, $Dg(x) = 1 \neq 0$ dans V et $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$. De plus, comme

$$\lim_{x\to 0} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6}{1-3x}}{1} = 6,$$

par application du théorème des limites des fonctions composées, la limite demandée vaut e^6.

3) La fonction est définie sur $]0, +\infty[$. Comme tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre l'intersection du domaine de définition de cette fonction avec $]0, +\infty[$, la limite en 0^+ a un sens. Pour lever l'indétermination $0.\infty$, on transforme ce produit en un quotient pour pouvoir appliquer le théorème de l'Hospital. Ainsi, $x^2 \ln(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^{-2}}$ et on considère $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{-2}$. Ces deux fonctions sont dérivables dans un intervalle ouvert $V =]0, r[\ (r > 0)$, $Dg(x) = -2x^{-3} \neq 0$ dans V et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$. De plus, comme

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0,$$

la limite demandée vaut 0.

4) La fonction est définie sur $]\pi, +\infty[$. Comme tout intervalle ouvert comprenant π rencontre l'intersection du domaine de définition de cette fonction avec $]\pi, +\infty[$, la limite en π^+ a un sens. Pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$, on applique le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées. En effet, si $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = (x - \pi)^{\frac{1}{2}}$, ces deux fonctions sont dérivables dans un intervalle ouvert $V =]\pi, r[\ (r > 0)$, $Dg(x) = \frac{1}{2}(x - \pi)^{\frac{-1}{2}} \neq 0$ dans V et $\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} g(x) = 0$. De plus, comme

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{2}(x - \pi)^{\frac{-1}{2}}} = \lim_{x\to\pi^+} 2\cos(x)\sqrt{x - \pi} = 0,$$

la limite demandée vaut 0.

5) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non minoré ; la limite en $-\infty$ a donc un sens. Pour lever l'indétermination $\infty.0$, on transforme ce produit en un quotient pour pouvoir appliquer le théorème de l'Hospital. Ainsi, $x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x\to-\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0^-} \dfrac{\sin(y)}{y}$ si $y = \frac{1}{x}$. Dès lors,

$$\lim_{x\to-\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0^-} \frac{\sin(y)}{y} = \lim_{y\to 0^-} \cos(y) = 1.$$

6) La fonction est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x \neq -\ln(x)\}$, ensemble non majoré ; la limite en $+\infty$ a donc un sens. Pour lever l'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$, on applique le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées. En effet, si $f(x) = x\ln(x)$ et $g(x) = x + \ln(x)$, ces deux fonctions sont dérivables dans un

intervalle ouvert $V =]r, +\infty[$ $(r > 0)$, $Dg(x) = 1 + x^{-1} \neq 0$ dans V et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. De plus, comme

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x) + 1}{1 + x^{-1}} = +\infty,$$

la limite demandée vaut $+\infty$.

6.9.3 Représentation graphique de fonctions

Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

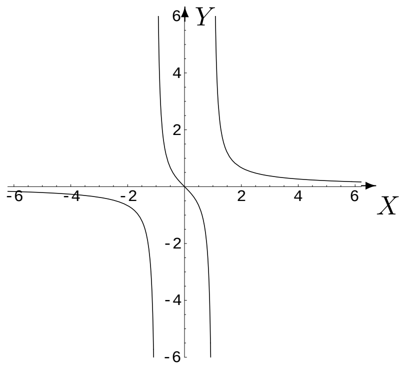
Les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité sont égaux à $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. La fonction est impaire car $\forall x \in \text{dom}(f)$, $-x \in \text{dom}(f)$ et on a $f(-x) = \frac{-x}{x^2-1} = -f(x)$. Dès lors, il suffit de restreindre l'étude sur l'ensemble $A = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ puisque le graphique de f est symétrique par rapport à l'origine du repère. L'unique zéro de cette fonction est 0.

Puisque $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$ avec $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, la fonction admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$. Elle admet également une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$ puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Cette fonction n'admet donc pas d'asymptote oblique.

La dérivée première vaut $Df(x) = (x^2 - 1)^{-1} - x(x^2 - 1)^{-2}.2x = (-x^2 - 1)(x^2 - 1)^{-2} < 0$ $\forall x \in A$ et la dérivée seconde vaut $D^2f(x) = -2x(x^2 - 1)^{-2} + 2(x^2 + 1)(x^2 - 1)^{-3}.2x = \dfrac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$.

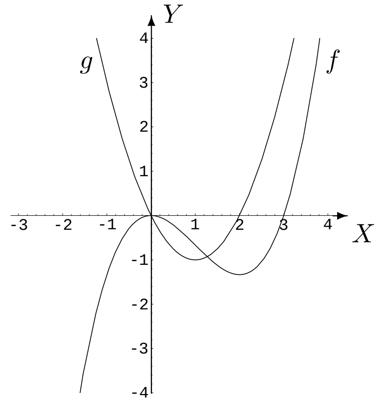
Tableau récapitulatif

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Df		$-$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$-$	
D^2f		$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	
f	$AH : y = 0$	$\searrow$	$AV : x = -1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$AV : x = 1$	$\searrow$	$AH : y = 0$
		$\cap$	$-\infty \mid +\infty$	$\cup$	PI	$\cap$	$-\infty \mid +\infty$	$\cup$	



6.9.4 Exercices divers

1. On donne le graphique de deux fonctions dérivables f et g. Une de ces deux fonctions est la dérivée de l'autre. Laquelle et pourquoi ?



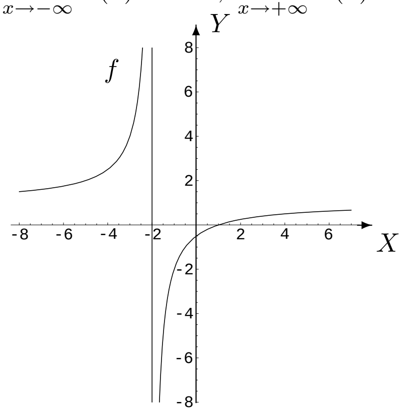
La fonction g est la dérivée de la fonction f. En effet, le tableau de signe de g est

x		0		2	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

ce qui correspond aux variations de f

x		0		2	
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

2. On donne le graphique de la fonction f. Construire le graphique d'une fonction F dont la dérivée est f et telle que $\lim\limits_{x\to -2} F(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} F(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x) = +\infty$ et $F(0) = -3\ln 2 \approx -2,1$.

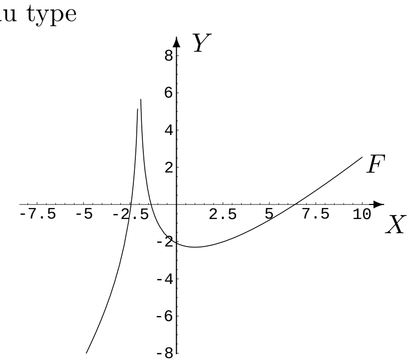


De l'étude du signe de f, on tire le tableau des variations de F

x		-2		1	
$f(x)$	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\nearrow$	$\vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

.

On obtient alors un graphique du type



3. On donne la parabole d'équation $y = x^2$. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente en son point $P(x_0, y_0)$ puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'axe

des ordonnées. En déduire une construction simple de la tangente en un point de cette parabole.

La fonction f définie par $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $Df(x) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$. Dès lors, l'équation cartésienne de la tangente au point P de la parabole est $y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$ et comme $y_0 = x_0^2$, l'équation devient $y = 2x_0x - y_0$.
Les coordonnées du point d'intersection de cette droite avec l'axe des ordonnées s'obtiennent en résolvant le système

$$\begin{cases} y = 2x_0x - y_0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -y_0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection Q sont donc $(0, -y_0)$. Ce point de l'axe des ordonnées a une ordonnée opposée à celle du point P donné. La tangente à la parabole en son point P est la droite PQ.

6.10 Quelques exercices à résoudre ... et leurs solutions

6.10.1 Exercices

1. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes puis calculer leur dérivée

   1. $f(x) = 3x^3 + 8x^2 - 2$
   2. $f(x) = (2x+1)^2(3x-5)$
   3. $f(x) = (1 - 3x + 5x^3)^3$
   4. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 1}$
   5. $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-1}$
   6. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$
   7. $f(x) = (1-x)^2\sqrt{1-x}$
   8. $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 5x + 7}$
   9. $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right)$
   10. $f(x) = \cos^2(3x+2)$
   11. $f(x) = \dfrac{\operatorname{cotg}(x)}{\sin(x)}$
   12. $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2(x)}$
   13. $f(x) = \arcsin(2x)$
   14. $f(x) = (\operatorname{arcos}(x))^4$
   15. $f(x) = \operatorname{arctg}(\cos(x))$
   16. $f(x) = \operatorname{arcotg}\dfrac{x-1}{x+2}$
   17. $f(x) = \sqrt{\arcsin(x)}$
   18. $f(x) = \cos(\operatorname{arctg}(x))$
   19. $f(x) = \operatorname{arcos}(1 - x^2)$
   20. $f(x) = \ln(2x)$
   21. $f(x) = x\ln(x) - x$
   22. $f(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$
   23. $f(x) = \ln|\cos(x)|$
   24. $f(x) = xe^x$
   25. $f(x) = \exp(\sin(2x))$
   26. $f(x) = \ln(\operatorname{arctg}(e^x))$
   27. $f(x) = \sin(3x)e^{3x}$
   28. $f(x) = e^{|x|}$
   29. $f(x) = |x|e^{-x}$
   30. $f(x) = \log_2(x^2 - 2)$
   31. $f(x) = \log\left|\dfrac{x-1}{4}\right|$
   32. $f(x) = 3^{\cos(2x)}$
   33. $f(x) = x^{\sin(x)}$
   34. $f(x) = \left(\dfrac{x}{e}\right)^x$

2. Donner une équation cartésienne de la tangente au graphique de f au point d'abscisse x_0 si

   1. $f(x) = \arcsin(\frac{x}{3})$ et $x_0 = \frac{3}{2}$
   2. $f(x) = \operatorname{arctg}(4x-2)^2$ et $x_0 = \frac{3}{4}$
   3. $f(x) = \ln(3x)$ et $x_0 = \frac{1}{3}$
   4. $f(x) = \ln^3(2x)$ et $x_0 = \frac{1}{2}$

3. Si elles existent, calculer les limites suivantes

   1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\text{tg}(2x)+\sin(x)}$
   2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\text{tg}(x)-\sin(x)}$
   3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\text{tg}(x)}{\cos(2x)}$
   4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$
   5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$
   6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x+\ln(x)}{2x+3\ln(x)}$
   7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
   8. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin(x))}{\ln(\text{tg}(x))}$
   9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{e^{x^2}-1}$
   10. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{e^x+3x^2}{4e^x+2x^2}$
   11. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{e^{-x}}$
   12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{\sin(x)}}{x-\sin(x)}$
   13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{b}{x}\right)^{ax} \quad (a, b \in \mathbb{R}_0)$
   14. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{4x-2}$
   15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(2x)}$
   16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2\sin(x)}{x\sin(x)}$
   17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(2x)}{\arcsin(x)}$
   18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\text{arctg}(x)}{x\sin(x)}$
   19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\arcsin(x)}{x-\sin(x)}$
   20. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$
   21. $\lim\limits_{x\to +\infty} ((x^2-1)e^{-x^2})$
   22. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin(x)\ln(\sin(x)))$
   23. $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x-1)^x$

4. Représenter graphiquement les fonctions suivantes définies par

   1. $f(x) = x|x| - x$
   2. $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$
   3. $f(x) = \sqrt[3]{x}(x+4)$
   4. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$
   5. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$
   6. $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$
   7. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
   8. $f(x) = \sqrt{x^3+3x^2}$
   9. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3+2x^2+x}$
   10. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
   11. $f(x) = |x|e^{-x}$
   12. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$
   13. $f(x) = x\ln(x)$
   14. $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = \text{ch}(x)$
   15. $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} = \text{sh}(x)$

6.10.2 Solutions

Exercice 1

	dom(f)	dom. dérivabilité de f	$Df(x)$
1.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$9x^2+16x$
2.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(2x+1)(18x-17)$
3.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3(1-3x+5x^3)^2(15x^2-3)$
4.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{5x^2+2x-5}{(x^2+1)^2}$
5.	$\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$	$\dfrac{-3x^2+4x-2}{x^2(x-1)^2}$
6.	$]-\infty,-\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5},+\infty[$	$]-\infty,-\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5},+\infty[$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5}}$
7.	$]-\infty,1]$	$]-\infty,1]$	$\dfrac{5(x-1)\sqrt{1-x}}{2}$
8.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{6x-5}{3\sqrt[3]{(3x^2-5x+7)^2}}$
9.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)$
10.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-6\cos(3x+2)\sin(3x+2)$
11.	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$-\dfrac{1+\cos^2(x)}{\sin^3(x)}$
12.	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{2}{3\cos^2(x)\sqrt[3]{\mathrm{tg}(x)}}$
13.	$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$	$]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$	$\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
14.	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\dfrac{-4\mathrm{arcos}^3(x)}{\sqrt{1-x^2}}$
15.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$
16.	$\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	$\dfrac{-3}{2x^2+2x+5}$
17.	$[0,1]$	$]0,1[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\arcsin(x)(1-x^2)}}$
18.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{-\sin(\mathrm{arctg}(x))}{1+x^2}$
19.	$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$	$]-\sqrt{2},0[\cup]0,\sqrt{2}[$	$\dfrac{2x}{\lvert x\rvert\sqrt{2-x^2}}$
20.	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$
21.	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\ln(x)$
22.	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	$\dfrac{2}{x^2-1}$
23.	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$-\mathrm{tg}(x)$

	dom(f)	dom. dérivabilité de f	$Df(x)$
24.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(x+1)e^x$
25.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$
26.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{e^x}{(1+e^{2x})\text{arctg}(e^x)}$
27.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3e^{3x}(\cos(3x)+\sin(3x))$
28.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_0$	$\begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x<0 \\ e^x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$
29.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_0$	$\begin{cases} e^{-x}(x-1) & \text{si} \quad x<0 \\ e^{-x}(1-x) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$
30.	$]-\infty,-\sqrt{2}[\,\cup\,]\sqrt{2},+\infty[$	$]-\infty,-\sqrt{2}[\,\cup\,]\sqrt{2},+\infty[$	$\dfrac{2x}{(x^2-2)\ln(2)}$
31.	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\dfrac{1}{(x-1)\ln(10)}$
32.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-2\sin(2x).3^{\cos(2x)}.\ln(3)$
33.	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$x^{\sin(x)}\left(\cos(x)\ln(x)+\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$
34.	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$\left(\dfrac{x}{e}\right)^x\ln(x)$

Exercice 2

1. $4\sqrt{3}\;x-18y+3\pi-6\sqrt{3}=0$
2. $4x-y+\dfrac{\pi}{4}-3=0$
3. $3x-y-1=0$
4. $y=0$

Exercice 3

1. 0
2. 2
3. 1
4. 0
5. $+\infty$
6. $\dfrac{3}{2}$
7. 2
8. 1
9. ∞ $(G:-\infty;D:+\infty)$
10. en $-\infty:\dfrac{3}{2}$; en $+\infty:\dfrac{1}{4}$
11. 0
12. 1
13. e^{ab}
14. e^{-28}
15. $\dfrac{1}{2}$
16. 0
17. 2
18. 0
19. ∞ $(G:-\infty;D:+\infty)$
20. $-\dfrac{1}{2}$
21. 0
22. 0
23. 1