

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2008-2009

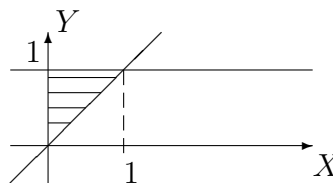
Remédiation relative au calcul intégral de fonctions de plusieurs variables

1. Énoncés

1. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes sur l'ensemble borné fermé hachuré

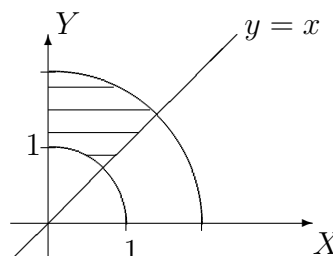
a)

$$\int \int_A x \sqrt{y^2 - x^2} \, dx \, dy$$



b)

$$\int \int_A \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$



2. Déterminer le volume du corps situé dans le premier octant ($x, y, z \geq 0$) borné par le plan d'équation cartésienne $x + z = 6$ et la surface d'équation $x = 4 - y^2$. Donner une représentation graphique de ce corps.

3. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a) \int_{-1}^0 \left(\int_{-3x-4}^0 f(x, y) dy \right) dx, \quad b) \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} f(x, y) dx \right) dy.$$

4. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes

$$a) \int_0^1 \left(\int_y^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{x^2 + y^2} dx \right) dy, \quad b) \int_{-1}^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x+y} dy \right) dx.$$

2. Solutions

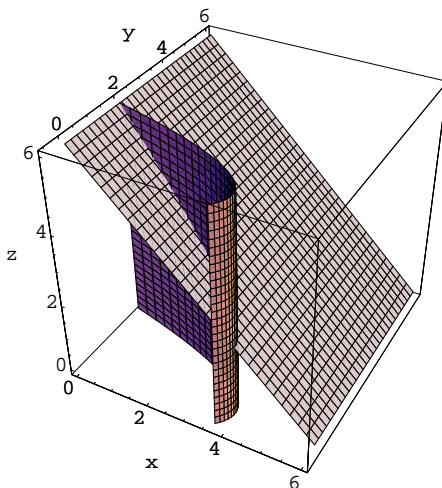
Exercice 1 :

a) L'intégrale vaut $\frac{1}{12}$.

b) L'intégrale vaut $\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2

Le volume vaut $\frac{352}{15}$.



Exercice 3

$$a) \int_{-4}^{-1} \left(\int_{\frac{-y-4}{3}}^0 f(x, y) dx \right) dy + \int_{-1}^0 \left(\int_{-1}^0 f(x, y) dx \right) dy$$

$$b) \int_{-1}^0 \left(\int_0^{x+1} f(x, y) dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x, y) dy \right) dx$$

Exercice 4

a) $\frac{\pi}{2}$

b) $2 \ln(2) - 2$