Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2008-2009

Mathématiques générales 2008-2009 : TD 10 mars 2009

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ \frac{-1}{i^3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix}$.

   Calculer, si c'est possible, $A^*\widetilde{B}$.

2. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Pour les géologues** :

   Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

   Pour les autres : Si a est un réel donné, montrer que la matrice suivante admet toujours un inverse et déterminer celui-ci.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Pour quelles valeurs du réel $\alpha \in [0, 2\pi]$ la matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin(2\alpha) \\ \sin\alpha & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}$ admet-elle une matrice inverse ? Déterminer alors cet inverse.

5. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Le produit d'une matrice et de sa transposée est toujours possible Vrai☐ Faux☐
   (b) Si A est une matrice et si $\widetilde{A}$ désigne sa transposée, on sait que les produits $A\widetilde{A}$ et $\widetilde{A}A$ existent tous les deux. On peut donc en déduire que ceux-ci sont égaux Vrai☐ Faux☐
   (c) Dans le cadre de la multiplication entre une matrice et sa transposée, la propriété de commutativité est correcte Vrai☐ Faux☐
   (d) Exprimer mathématiquement l'associativité du produit matriciel.
   (e) Une matrice carrée est qualifiée de matrice symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée. Si une matrice symétrique admet un inverse, cet inverse est-il encore une matrice symétrique ? Expliquer votre réponse.
   (f) On suppose que la matrice carrée A est telle que $A\widetilde{A} = I$. Cette propriété est-elle suffisante pour que A soit une matrice inversible ? Pourquoi ?

   Si votre réponse est oui, quelle est alors l'expression de l'inverse de A dans ce cas particulier ?
   (g) On suppose que la matrice carrée A est telle que $A\widetilde{A} = I$. Cette propriété est-elle nécessaire à l'inversibilité de A ? Pourquoi ?
   (h) Si une matrice est réelle, alors ses valeurs propres sont réelles aussi. Vrai☐ Faux☐
   (i) Il n'est pas possible qu'une matrice dont au moins un élément est complexe possède uniquement des valeurs propres réelles. Vrai☐ Faux☐
   (j) Deux matrices qui ont les mêmes valeurs propres sont en fait nécessairement les mêmes matrices. Vrai☐ Faux☐

Mathématiques générales 2008-2009 : solutions du TD 10 mars 2009

---

1. Le produit est possible et on a $A^*\widetilde{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1-i \\ -1-2i & 3+i \end{pmatrix}$.
2. Le déterminant vaut -6.
3. **Pour les géologues** : le déterminant de la matrice donnée vaut -2. Puisqu'il diffère de zéro, la matrice inverse existe et vaut $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \text{-i} & 1 \\ 1 & \text{-i} \end{pmatrix}$.

Pour les autres : le déterminant de la matrice donnée vaut 1. Puisqu'il diffère de zéro, la matrice inverse existe et vaut $\begin{pmatrix} 1 & \text{-a} & 0 \\ 0 & 1 & \text{-a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Si $\alpha \in [0, 2\pi]$ et si $\alpha \neq \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ alors la matrice donnée admet une matrice inverse égale à

$$\frac{1}{\cos(3\alpha)} \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

5. Les valeurs propres de la première matrice sont $-i$ et i.
Ses vecteurs propres relatifs à la valeur propre $-i$ sont les multiples non nuls du vecteur $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ et ceux relatifs à la valeur propre i sont les multiples non nuls du vecteur $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$.
Cette matrice possédant deux vecteurs propres linéairement indépendants est diagonalisable.
La matrice inversible $\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, par exemple, transforme la matrice donnée en $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de la deuxième matrice sont -1 et 2 (valeur propre double).
Ses vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 sont les vecteurs $c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c,\ c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls et ceux relatifs à la valeur propre -1 sont les multiples non nuls du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Cette matrice possédant trois vecteurs propres linéairement indépendants est diagonalisable.
La matrice inversible $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, par exemple, transforme la matrice donnée en $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. (a) Vrai
   (b) Faux
   (c) Faux
   (d) Si $A,\ B,\ C$ sont des matrices de format respectivement $n \times p,\ p \times q$ et $q \times r$ $(n, p, q, r \in \mathbb{N}_0)$ alors on a $A(BC) = (AB)C$.
   (e) Oui car $S^{-1} = (\widetilde{S})^{-1} = \widetilde{(S^{-1})}$.
   (f) Oui car $\det(A) \neq 0$. L'inverse de A est $\widetilde{A}$.

(g) Non car si $A\widetilde{A} = I$, le déterminant de A vaut -1 ou 1. Or il suffit d'avoir une matrice carrée de déterminant non nul pour que l'inverse existe.

(h) Faux

(i) Faux

(j) Faux