ANALYSE II, 2008-2009, 2e bachelier ingénieur civil
Examen du 05 janvier 2009 — Solutions
Version: January 6, 2009, (V1: 31-12-08)

THEORIE

Question 1

1.1) Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Enoncer ce que l'on appelle "formule de représentation intégrale de Cauchy pour f et ses dérivées". Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.

1.2) Enoncer et démontrer le résultat donnant le développement en série de puissances d'une fonction holomorphe dans un ouvert (développement de Taylor). Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.

Solution. Voir cours et syllabus. Mais aussi voir l'examen de janvier 2007 et août 2008.

Question 2

Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace de Hilbert H puis, en guise d'application, l'énoncer dans l'espace $H = L^2([0,1])$ (en précisant la signification des notations employées).

Solution. Voir cours et aussi l'examen de janvier 2007 et d'août 2008.

EXERCICES

Question 1 Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches.

On fixe un repère orthonormé de l'espace.

1.1) On considère la surface d'équation cartésienne $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ située entre les plans d'équation $z = 0$ et $z = 1$ et la fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z) = [y,x,z]$. Si $\vec{n}$ est la normale unitaire (après choix d'orientation) à la surface, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int\int_{\mathcal{S}} \vec{n} \bullet \vec{f}\ d\sigma$$

1.2) Si $\vec{r} = [x,y,z]$ et si $\vec{a}$ est un vecteur constant, montrer que le rotationnel du champ $\vec{a} \wedge \vec{r}$ est constant et déterminer cette constante.

Solution. 1.1) La surface considérée est une partie du cône d'équation cartésienne $(z-1)^2 = x^2 + y^2$, de sommet $(0,0,1)$; il s'agit d'un "chapeau posé sur le plan d'équation $z = 0$". Un paramétrage injectif de cette surface (sans le sommet) est donné par

$$\vec{\varphi}(t,\theta) = \Big[(1-t)\cos\theta, (1-t)\sin\theta, t\Big], \quad t \in [0,1[,\ \theta \in [0,2\pi[$$

La normale $\vec{N}$ orientée " vers l'extérieur" définie par ce paramétrage est donnée par

$$\vec{N}(t,\theta) = D_\theta\vec{\varphi}(t,\theta) \wedge D_t\vec{\varphi}(t,\theta) = (1-t)[\cos\theta, \sin\theta, 1].$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathcal{S}} \vec{n} \bullet \vec{f}\ d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{\vec{N}(t,\theta)}{\|\vec{N}(t,\theta)\|} \bullet \vec{f}\Big((1-t)\cos\theta, (1-t)\sin\theta, t\Big)\right) \|\vec{N}(t,\theta)\|\ d\theta\ dt \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(\vec{N}(t,\theta) \bullet \vec{f}\Big((1-t)\cos\theta, (1-t)\sin\theta, t\Big)\Big)\ d\theta\ dt \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big((1-t)^2\sin(2\theta) + t(1-t)\Big)\ d\theta\ dt \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 t(1-t)\ d\theta\ dt \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Question 2 Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches.

2.1) On donne les fonctions f et g par

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, \quad g(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$$

a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes?
b) Quels sont leurs zéros? Quelles en sont les multiplicités respectives?
c) Quelles sont les singularités isolées? De quels types sont-elles?
d) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
e) Pour f, déterminer le développement de Laurent en chacune des singularités isolées.

2.2) Soit γ le bord du carré centré l'origine, de longueur de côté égale à 2. On considère qu'on parcourt ce bord "aire à gauche" et qu'on utilise un paramétrage injectif. Déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$\int_\gamma \Re z \; dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{2z-i} dz$$

2.3) Déterminer la valeur des intégrales suivantes par "méthode de variables complexes"

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2} \; dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+ix)^4} dx$$

Solution. 2.1) Cas de la fonction f.

a,b) La fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et n'a pas de zéro.

c) Sa seule singularité isolée est 0 et elle est essentielle car la fonction "H" du développement de Laurent n'est pas un polynôme: on a en effet le développement de Laurent suivant

$$f(z) = z^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m! z^m} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+2)! z^m}$$

et, avec les notations habituelles,

$$h(z) = z^2 + z + \frac{1}{2}, \quad H(Z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{Z^m}{(m+2)!}.$$

d,e) Vu le développement précédent, on obtient directement

$$Res_0 f = \text{coefficient de } \frac{1}{z} \text{ dans le développement de Laurent } = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

et

$$f(z) = z^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m! z^m} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+2)! z^m}$$

avec les notations habituelles

$$h(z) = z^2 + z + \frac{1}{2}, \quad H(Z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{Z^m}{(m+2)!}.$$

Cas de la fonction g.

a) Vu son expression (quotient de deux fonctions holomorphes dans le plan complexe), la fonction g est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur, à savoir dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Les zéros sont les complexes de Ω qui annulent le numérateur, à savoir $z_k := \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$. Chacun de ces zéros est un zéro simple du numérateur car $D\cos z = -\sin z$ ne s'y annule pas. On peut donc écrire (avec G_k holomorphe dans $\mathbb{C}$):

$$g(z) = (z - z_k) \frac{G_k(z)}{\sin z}, \quad \frac{G_k(z_k)}{\sin z_k} \neq 0$$

ce qui indique que z_k est un zéro de multiplicité 1 pour g.

c,d) Les singularités isolées de g sont les zéros du dénominateur, à savoir les complexes $w_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Il s'agit donc de pôles. De plus, on a directement

$$\lim_{z \to w_k}(z - w_k)g(z) = \lim_{z \to w_k} \frac{\cos z}{\frac{\sin z}{z - w_k}} = \lim_{z \to w_k} \frac{\cos z}{\frac{\sin z - \sin w_k}{z - w_k}} = \frac{\cos z_k}{D \sin z_k} = 1$$

ce qui indique que w_k est un pôle d'ordre 1 pour g et que le résidu est égal à 1.

2.2) En prenant une orientation "aire à gauche", le bord γ du carré est constitué de la superposition de quatre segments dont des paramétrages injectifs sont donnés par

$$1 + it,\ t \in [-1,1]; \quad i - t,\ t \in [-1,1]; \quad -1 - it,\ t \in [-1,1]; \quad -i + t,\ t \in [-1,1].$$

Pour la première intégrale, on obtient directement

$$\int_\gamma \Re z\ dz = \int_{-1}^1 idt + \int_{-1}^1 tdt + \int_{-1}^1 idt + \int_{-1}^1 tdt = 4i.$$

Comme $z \mapsto \dfrac{1}{2z - i}$ est holomorphe dans le complémentaire de $\frac{i}{2}$, la seconde intégrale s'obtient directement en utilisant soit la représentation intégrale de Cauchy, soit le théorème des résidus

$$\int_\gamma \frac{1}{2z - i} dz = i\pi.$$

2.3) Première intégrale.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 à l'infini après multiplication par x^2; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Cela étant, posons

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + z + 1)^2}.$$

Cette fonction est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur à savoir en tout complexe différent des racines cubiques complexes de 1: $\mathbb{C} \setminus \{e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\}$. En considérant les chemins γ_R $(R > 1)$ constitués par la juxtaposition du segment Γ_R joignant les réels $-R$ et R et de la demi-circonférence $\mathcal{C}_R$ centrée à l'origine, de rayon R, orientée dans le sens trigonométrique et dont les points ont une partie imaginaire positive, on obtient d'une part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}\ dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz$$

car

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz \right| \le \frac{\pi R}{(R^2 - R - 1)^2} \quad \to 0 \text{ si } R \to +\infty.$$

D'autre part, par le théorème des résidus et en tenant compte du fait que $e^{2i\pi/3}$ est un pôle d'ordre 2 pour f, on a

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi Res_{e^{2i\pi/3}} f = 2i\pi \lim_{z \to e^{2i\pi/3}} D \left(z - e^{2i\pi/3}\right)^2 f(z) = 2i\pi\ D \frac{1}{\left(z - e^{4i\pi/3}\right)^2}\Bigg|_{z = e^{2i\pi/3}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}\ dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$$

Seconde intégrale. (Cette intégrale est un cas particulier d'un exemple traité aux répétitions.)

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+ix)^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, après multiplication par x^2, elle tend vers 0 à l'infini. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Cela étant, la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(1 + iz)^4}$$

est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$. En considérant les chemins γ_R ($R > 1$) constitués par la juxtaposition du segment Γ_R joignant les réels $-R$ et R et de la demi-circonférence $\mathcal{C}_R$, centrée à l'origine, de rayon R, orientée dans le sens trigonométrique inverse et dont les points ont une partie imaginaire négative, on obtient d'une part

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+ix)^4} dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz$$

car

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R-1)^4} \qquad \to 0 \text{ si } R \to +\infty.$$

D'autre part, comme f est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ et comme γ_R est homotope à un chemin constant dans cet ouvert, on a

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

donc finalement

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+ix)^4} dx = 0.$$

Question 3 Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches.

3.1) Dans l'espace $L^2([-1,1])$ on a le développement suivant

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.

3.2) Déterminer la transformée de Fourier $(-)$ de la fonction suivante

$$f(x) = \cos x \quad e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Solution. 3.1) Quel que soit $m \in \mathbb{N}$ différent de 1, on a $< \cos(.), \cos(m\pi.) >= 0$ donc

$$\int_{-1}^{1} x^2 \cos(\pi x)\ dx = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m < \cos(.), \cos(m\pi.) >= a_1 < \cos(.), \cos(\pi.) >= a_1.$$

Comme

$$\int_{-1}^{1} x^2 \cos(\pi x)\ dx = -\frac{4}{\pi^2}$$

on en déduit que

$$a_1 = -\frac{4}{\pi^2}.$$

3.2) (La transformée de Fourier de $x \mapsto e^{ix}e^{-|x|}$ a été traitée explicitement aux répétitions.)

Comme la fonction donnée est continue sur $\mathbb{R}$ et que son module est majoré par la fonction intégrable $x \mapsto e^{-|x|}$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on peut en déterminer sa transformée de Fourier. Cela étant, elle se décompose en une somme de deux fonctions intégrables

$$f(x) = \frac{e^{ix}e^{-|x|}}{2} + \frac{e^{-ix}e^{-|x|}}{2}$$

dont les transformées de Fourier se calculent directement. Pour tout réel y, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^- f &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}e^{ix}e^{-|x|}\ dx\ +\ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}e^{-ix}e^{-|x|}\ dx \\
&= \int_0^{+\infty} \cos((y-1)x)\ e^{-x}\ dx\ +\ \int_0^{+\infty} \cos((y+1)x)\ e^{-x}\ dx \\
&= \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{-x(1+i(y-1))}dx\ +\ \int_0^{+\infty} e^{-x(1+i(y+1))}dx\right) \\
&= \frac{1}{1+(y-1)^2} + \frac{1}{1+(y+1)^2}.
\end{aligned}$$

Question 4 Répondre par vrai ou faux et justifier la réponse.

a) Si f est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et si 0 est singularité essentielle de f, alors 0 est aussi singularité essentielle de $F\ :\ z \mapsto \frac{f(1/z)}{z}$
Vrai □ **Faux** □

b) Si f est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ et si le résidu de f en z_0 est nul, alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$
Vrai □ **Faux** □

c) La fonction $z \mapsto \exp(iz)$ est bornée dans $\mathbb{C}$.
Vrai □ **Faux** □

d) Il existe une fonction intégrable f telle que $\mathcal{F}_y^- f = \frac{y^2}{1+y^2},\ y \in \mathbb{R}$.
Vrai □ **Faux** □

Solution. a) C'est faux comme le montre l'exemple de $f(z) = e^{1/z}$; on a $F(z) = e^z/z$, F est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et 0 est un pôle d'ordre 1 pour F.

b) C'est faux comme le montre l'exemple de la fonction $z \mapsto \frac{1}{(z-z_0)^2}$ dont le résidu est nul mais qui n'admet pas de limite finie en z_0, donc qui ne se prolonge pas en une fonction holomorphe en z_0.

c) C'est faux car $\lim_{\Im z \to -\infty} |e^{iz}| = \lim_{\Im z \to -\infty} e^{-\Im z} = +\infty$.

d) C'est faux car la transformée de Fourier d'une fonction intégrable a une limite nulle à l'infini, ce qui n'est pas le cas de $y \mapsto \frac{y^2}{1+y^2}$.