ANALYSE II, 2008-2009, 2e bachelier ingénieur civil
Examen du 17 août 2009 — Solutions
Version: Août 2010, (V1: 29-07-09)

THEORIE

Question 1

1.1) Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Enoncer ce que l'on appelle "formule de représentation intégrale de Cauchy pour f et ses dérivées". Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.
1.2) Enoncer et démontrer le résultat donnant le développement en série de puissances d'une fonction holomorphe dans un ouvert (développement de Taylor). Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.

Solution. Voir l'examen de janvier 2009.

Question 2

Donner la définition de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$. Enoncer ensuite le théorème de Fourier (pour une fonction intégrable de transformée intégrable) en exprimant toutes les transformées de Fourier explicitement (c'est-à-dire sous forme d'intégrale, en repassant à la définition).

Solution. Voir la correction de l'examen d'août 2007.

EXERCICES

Question 1

1.1) **On fixe un repère orthonormé de l'espace et on donne la sphère $\mathcal{S}$ centrée à l'origine et de rayon $R > 0$**

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}.$$

Si ρ est la densité de masse de la sphère, le moment d'inertie de cette sphère par rapport à l'axe Z est donné par

$$I = \int\int_{\mathcal{S}} \rho \ (x^2 + y^2) \ d\sigma.$$

Si m est la masse totale et si la densité $\rho = \frac{m}{4\pi R^2}$ est constante, déterminer le moment d'inertie I.

1.2) Si $\vec{v}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ est dérivable et si le vecteur $\vec{v}(t)$ est de longueur 1 quel que soit t, montrer que $\vec{v}$ est toujours orthogonal à sa dérivée.

Solution. 1.1) Un paramétrage régulier et injectif de la sphère privée d'un méridien est

$$\vec{f}\,(\varphi, \theta) = \left\{ \begin{array}{l} R\cos\varphi \sin\theta \\ R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\theta \end{array} \right. , \quad \varphi \in]0, 2\pi[, \ \theta \in]0, \pi[.$$

On a donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho\left(\vec{f}(\varphi,\theta)\right) \ \left(R^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right) \ \left\|D_\varphi \vec{f} \wedge D_\theta \vec{f}\right\| \ d\varphi d\theta \\ &= \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \sin^2\theta \ R^2\sin\theta \ d\varphi d\theta \ = \ \rho \ 2\pi \ R^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta \ d\theta \\ &= 2\pi R^4 \rho \int_0^{\pi} (D_\theta \cos\theta)(\cos^2\theta - 1) \ d\theta \\ &= 2\pi R^4 \rho \left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^{\pi} = 2\pi R^4 \rho \frac{4}{3} \\ &= \frac{2mR^2}{3}. \end{aligned}$$

1.2) (Cet exercice fait partie des listes d'exercices "type").
Puisque le vecteur $\vec{v}(t)$ est de longueur 1 quel que soit t, on a

$$\vec{v}(t) \bullet \vec{v}(t) = \|\vec{v}(t)\|^2 = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

La dérivabilté de $\vec{v}$ et l'expression de la dérivée d'un produit scalaire donnent ainsi

$$D_t \left(\vec{v}(t) \bullet \vec{v}(t)\right) = 2\vec{v}(t) \bullet D_t\vec{v}(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

ce qui montre que $\vec{v}$ est toujours orthogonal à sa dérivée.

Question 2 Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches.

2.1) On donne les fonctions f et g par

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}, \quad g(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$$

a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes?
b) Quels sont leurs zéros? Quelles en sont les multiplicités respectives?
c) Quelles sont les singularités isolées? De quels types sont-elles?
d) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
e) Pour f, déterminer le développement de Laurent en chacune des singularités isolées.

2.2) Soit γ le bord du carré centré l'origine, de longueur de côté égale à 2. On considère qu'on parcourt ce bord "aire à gauche" et qu'on utilise un paramétrage injectif. Déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$\Re\left(\int_\gamma z \ dz\right), \ \int_\gamma \Im z \ dz, \ \int_\gamma \Im(z - |z|) \ dz$$

2.3) Déterminer la valeur des intégrales suivantes par "méthode de variables complexes"

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2} \ dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+ix)^4} dx$$

Solution. 2.1) Cas de la fonction f.
a) La fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et ne se prolonge pas en une fonction holomorphe en 0 car $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{\sin z}{z} \ \frac{1}{z}\right) = \infty$.
b) Les zéros de f sont les zéros de la fonction sinus, à l'exception de 0, à savoir les complexes $z_m = m\pi, \ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Chacun de ces zéros est un zéro simple du numérateur car $D \sin z = \cos z$ ne s'y annule pas. On peut donc écrire (avec F_m holomorphe dans $\mathbb{C}$):

$$f(z) = (z - z_m)\frac{F_m(z)}{z^2}, \quad \frac{F_m(z_m)}{z_m^2} \neq 0$$

ce qui indique que z_m est un zéro de multiplicité 1 pour f.
c) Sa seule singularité isolée est 0 et c'est un pôle d'ordre 1 car

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0.$$

d) Le résidu en le pôle 0 d'ordre 1 est

$$Res_0 f = \lim_{z\to 0} zf(z) = 1.$$

e) Le développement de Taylor de la fonction sinus en 0 est

$$\sin z = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}, \ z \in \mathbb{C}.$$

On a donc

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m-1}}{(2m+1)!}, \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Le développement de Laurent demandé est donc

$$f(z) = h(z) + H\left(\frac{1}{z}\right)$$

avec

$$h(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m-1}}{(2m+1)!} = \frac{\sin z - z}{z^2}, \quad H(Z) = Z.$$

Cas de la fonction g: voir la correction de l'examen de janvier 2009.

2.2) Comme la fonction $z \mapsto z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et comme le chemin γ est homotope à un chemin constant dans $\mathbb{C}$, on a

$$\int_\gamma z \ dz = 0$$

donc la première intégrale est

$$\Re\left(\int_\gamma z \ dz\right) = 0.$$

Les deuxième et troisième fonctions à intégrer n'étant pas holomorphes, les intégrales se calculent explicitement en revenant à la définition. En prenant une orientation "aire à gauche", le bord γ du carré est constitué de la superposition de quatre segments dont des paramétrages injectifs sont donnés par

$$1 + it, \ t \in [-1, 1]; \quad i - t, \ t \in [-1, 1]; \quad -1 - it, \ t \in [-1, 1]; \quad -i + t, \ t \in [-1, 1].$$

Pour la deuxième intégrale, on obtient directement

$$\int_\gamma \Im z \ dz = \int_{-1}^{1} tidt + \int_{-1}^{1} (-1)dt + \int_{-1}^{1} tidt + \int_{-1}^{1} (-1)dt = 0 - 2 - 2 + 0 = -4.$$

La troisième intégrale se déduit immédiatement de la précédente:

$$\int_\gamma \Im(z - |z|) \ dz = \int_\gamma (\Im z - \Im |z|) \ dz = \int_\gamma \Im z \ dz = -4$$

2.3) Voir la correction de l'examen de janvier 2009.

Question 3 Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches.

3.1) On considère l'espace $L^2([-1, 1])$ muni du produit scalaire habituel et on donne les fonctions

$$u(t) = e^{i\pi t} (t \in [-1, 1]), \quad v(t) = e^{-i\pi t} (t \in [-1, 1])$$

- Montrer que ces fonctions sont orthogonales.
- Déterminer la norme de la fonction u.

3.2) Déterminer la transformée de Fourier $(-)$ de la fonction suivante

$$f(x) = e^{-|\pi x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Solution. 3.1) Les fonctions données sont continues sur $[-1, 1]$ donc y sont de carré intégrable; elles appartiennent donc bien à $L^2([-1, 1])$.
- Elles sont orthogonales dans cet espace car leur produit scalaire est nul; en effet

$$\int_{-1}^{1} u(t)\overline{v(t)} \ dt = \int_{-1}^{1} e^{i\pi t} e^{i\pi t} dt = \int_{-1}^{1} e^{2i\pi t} dt = \frac{1}{2i\pi} \left[e^{2i\pi t}\right]_{-1}^{1} = 0.$$

- La norme de u est

$$\|u\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} |u(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1 dt} = \sqrt{2}.$$

3.2) La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle y est continue, paire et vérifie $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$. Cela étant, pour tout réel y, on a successivement

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^- f &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} e^{-\pi|x|}\ dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} \cos(xy) e^{-\pi x}\ dx \\
&= 2\Re\left(\int_0^{+\infty} e^{-\pi x - ixy}\ dx\right) \\
&= 2\Re\left[\frac{e^{-(\pi+iy)x}}{-\pi - iy}\right]_0^{+\infty} \\
&= 2\Re\left(\frac{1}{\pi + iy}\right) = \frac{2\pi}{\pi^2 + y^2}.
\end{aligned}$$