Analyse II

Liste “type” 3

Mardi 07 octobre 2008-mardi 14 octobre 2008

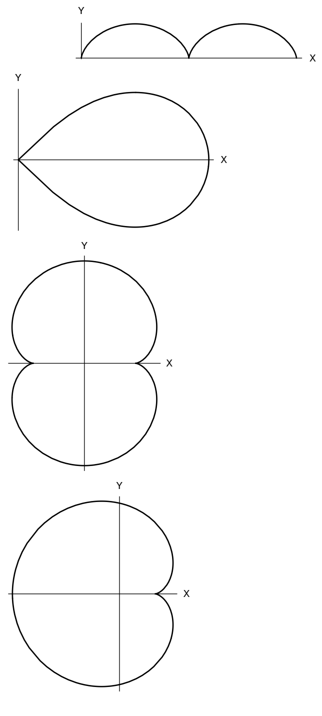
REMARQUES pour les séances de répétition
- Réf: notamment le livre de référence pour le cours, à savoir *Erwin Kreyzsig* 10.1, 10.2, 10.4, 10.5, 10.6, 10.7, 10.8, 10.9, ainsi que certaines parties du chapitre 9
- A la répétition: exercices *

ANALYSE VECTORIELLE, 2ème PARTIE (courbes, surfaces)

1. (repris de la liste 2 de 2006-2007)
   Voici plusieurs paramétrages de courbes planes et leur représentation.
   - (*) Associer chaque paramétrage à sa représentation.
   - (* A la répétition: au moins deux cas)
   En tout point de chacune des courbes, déterminer un vecteur tangent et un vecteur normal.

$$(t - \sin t, 1 - \cos t)\ t \in [0, 4\pi]; \quad (\sqrt{\cos(2t)}\cos t, \sqrt{\cos(2t)}\sin t)\ t \in [-\pi/4, \pi/4]$$

$$(2\cos t - \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t)),\ t \in [0, 2\pi]; \quad (3\cos t - \cos(3t), 3\sin t - \sin(3t)),\ t \in [0, 2\pi]$$



2. a) Déterminer un vecteur normal à la courbe plane d'équation cartésienne $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ au point de coordonnées $(1/2, \sqrt{3})$. Donner une représentation de la courbe et du vecteur.

   b) (*) Déterminer un vecteur normal et un vecteur tangent à la courbe plane d'équation cartésienne $4x^2 + y^2 - 2y = 15$ au point de coordonnées $(\sqrt{3}, 3)$. Donner une représentation de la courbe et des vecteurs.

3. (EK p 409) (*) Déterminer un vecteur normal à la surface d'équation cartésienne $x + y + z = 1$ au point P de coordonnées $(1/2, 1/2, 0)$ et en donner une représentation graphique. Même question pour la surface d'équation $z = x^2 + y^2$, $P(3, 4, 25)$.

   Déterminer une représentation paramétrique de chacune des surfaces.

4. (*) On donne les équations paramétriques suivantes (ie des paramétrages) de courbes et de surfaces. Esquisser chacune d'entre elles et en donner une équation cartésienne.

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x(t) = 1 - 2t \\ y(t) = -3 + 4t \end{array} \right. t \in \mathbb{R}; \quad b) \left\{ \begin{array}{l} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 4\sin t \end{array} \right. t \in \mathbb{R}; \quad c) \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{array} \right. t \in \mathbb{R};$$

$$d) \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right. t \in [-1,1]; \quad e) \left\{ \begin{array}{l} x(t) = -1 + \frac{3}{2}\sin t \\ y(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos t \end{array} \right. t \in [-\pi, 3\pi];$$

$$f) \left\{ \begin{array}{l} x(t,s) = \cos t \sin s \\ y(t,s) = 2\sin t \sin s \\ z(t,s) = 3\cos s \end{array} \right. , \ t, s \in \mathbb{R}$$

5. (*) On donne les équations cartésiennes suivantes de courbes et de surfaces (pour a), considérer le cas du plan puis le cas de l'espace). Esquisser chacune d'entre elles et en donner un paramétrage.

$$a) x^2 + 4y^2 = 1; \quad b) x^2 - y^2 + z^2 = 0; \quad c) x^2 + 3y^2 + z^2 = 1.$$

6. (* au moins un cas) Reprendre les courbes (ou arcs) des deux exercices précédents. Choisir une orientation et déterminer le vecteur tangent unitaire en chacun des points de la courbe orientée.

   Reprendre les surfaces des deux exercices précédents. Choisir une orientation et déterminer le vecteur normal unitaire en chacun des points de la surface orientée. Déterminer aussi deux vecteurs linéairement indépendants du plan tangent correspondant.

7. (références: EK sections 9.5, 9.7, 10.5).

   - Déterminer une représentation paramétrique des courbes suivantes, en spécifiant leur nature
     - segment de droite joignant les points de coordonnées $(5,1,2)$ et $(11,3,0)$
     - courbe d'équation cartésienne
     $$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ z = y \end{array} \right.$$
     - courbe d'équation cartésienne
     $$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ z = y \end{array} \right.$$
   - Esquisser quelques courbes de niveau de la surface d'équation cartésienne $z = f(x,y)$ avec
   $$f(x,y) = \frac{x}{y}, \qquad f(x,y) = (x-2)\ (y+2).$$
   - Section 10.5: Exercices 1-10, 12-19 (manipulation de paramétrages et d'équations cartésiennes standards)

ANALYSE VECTORIELLE, 2ème PARTIE suite (courbes, surfaces, intégration)

1. (*) (EK p427) On considère les courbes $\mathcal{C}$ qui relient les points A, B respectivement de coordonnées $(0,0,0)$ et $(2,2,2)$. Montrer que $\int_{\mathcal{C}}(2xdx + 2ydy + 4zdz)$ ne dépend pas de $\mathcal{C}$ et calculer la valeur de cette intégrale.

2. (*) On considère les courbes fermées $\mathcal{C}$ ne passant pas par l'origine. L'intégrale
$$\int_{\mathcal{C}}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)$$
dépend-elle de $\mathcal{C}$? Pourquoi?

(*Suggestion.* Intégrer sur le cercle unité centré à l'origine; calcul direct. Intégrer un autre cercle de rayon 1 qui "ne tourne pas autour de l'origine; calcul direct ou se servir du fait que $\frac{-y}{x^2+y^2} = D_x f$ et $\frac{x}{x^2+y^2} = D_y f$ avec $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Pour anticiper les résultats relatifs aux fonctions holomorphes, intégrer aussi sur le carré de côté de longueur 2, centré à l'origine, de côtés parallèles aux axes; calcul direct.)

3. Déterminer la longueur des courbes et l'aire des surfaces données ci-dessous.
- (*) astroïde $(a, b > 0)$: $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ (et esquisser la courbe)
- épicycloïde à deux rebroussements, de paramétrage $(3\cos t - \cos(3t), 3\sin t - \sin(3t))$, $t \in [0, 2\pi]$
- (*) surface latérale d'un cône
- (*) longueur de l'arcade de cycloïde de représentation paramétrique $(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ et aire de la surface déterminée par cette courbe et l'axe X
- surface déterminée par la cardioïde de représentation paramétrique $(2\cos t - \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t)$, $t \in [0, 2\pi]$

4. (*) Calculer les intégrales suivantes
- $\int_{\mathcal{C}} y^2 ds$ où $\mathcal{C}$ est l'arcade de cycloïde de représentation paramétrique $(u - \sin u, 1 - \cos u)$, $u \in [0, 2\pi]$.
- $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{2y^2 + z^2}ds$ où $\mathcal{C}$ est le cercle $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x = y\}$.
- $\int\int_{\mathcal{S}} x^2 z d\sigma$ où $\mathcal{S}$ est le bord du compact de l'espace défini par les relations $x^2 + y^2 \leq 1$ et $z \in [0, 1]$.

5. - (*) (EK p 444) Vérifier la formule de Green pour le champ vectoriel $\vec{f}(x,y) = [x^2 + y^2, x^2 - y^2]$ et la surface $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq y \leq 2 - x^2\}$. Représenter R.
- Même question pour $\vec{f} = [2x, -y]$ et la surface bornée du plan délimitée au-dessus de l'axe X par le cercle centré à l'origine et de rayon 1 et les droites d'équation respective $x = y$, $x = -y$.
- Calculer l'intégrale suivante en appliquant la formule de Green $\int_{\mathcal{C}} -x^2 y dx + xy^2 dy$, où $\mathcal{C}$ est le cercle centré à l'origine, de rayon R (on considère l'orientation "aire à gauche").

6. - (*) (EK p 463) Vérifier le théorème de la divergence avec les données suivantes $\vec{f} = [4x, 3z, 5y]$ et $\mathcal{S}$ est la surface du cône (portion de cône) $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0, 2]\}$.
- Même question pour (cf JS) le champ $\vec{f} = [x^2 + y^2, xy, z^2 + 1]$ et le compact V du premier octant limité par le plan $z = 2y$ et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 9$.

7. - (*) (EK p 473) Vérifier la formule de Stokes dans le cas du champ vectoriel $\vec{f}(x,y,z) = [y^2, x^2, -x + z]$ et du triangle de sommets de coordonnées $(0,0,1), (1,0,1), (1,1,1)$.
- Même question pour le champ (cf JS) $\vec{f} = [x^2 y, 0, xyz]$ et la surface composée de la portion du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ limitée par les plans $z = 0$ et $z = 2$ et l'ensemble $\{(x, y, 2) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

8. Montrer que la formule de Green dans le plan peut se déduire de la formule de Stokes. (*Une suggestion.* Poser $f_3 = 0$)

Montrer que la formule de Green dans le plan peut se déduire de la formule de la divergence. (*Une suggestion;* Poser $f_3 = 0$ et définir un volume "parallèle à l'axe Z" à partir de K dans le plan.)

9. (EK p 473) On donne les fonctions f_1, f_2, f_3 et le champ vectoriel $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$ par
$$f_1(x,y,z) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad f_2(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f_3(x,y,z) = 0.$$

Déterminer le rotationnel de $\vec{f}$ ainsi que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{f} \bullet \vec{v} ds$ ($\vec{v}$ désigne le vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}$= cercle de rayon 1 centré à l'origine). La formule de Stokes est-elle correcte dans ce cas? Pourquoi?

FB, October 13, 2008(V1:01-08-07)

Analyse II

Liste “type” 3

Solutions

Provenance des exercices de la liste 3 de cette année 2008-2009:

Courbes, surfaces

- exercices qui figurent dans la liste 3 de 2007-2008
- quelques modifications (cf exercices 2 et 3)

Suite-Courbes, surfaces, intégration

- exercices de la liste 3 de 2007-2008

Les solutions sont disponibles en format pdf (notamment via le site web www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html)

Ci-dessous sont présentées les solutions aux exercices qui figurent dans la liste 3 2007-2008 mais pas dans EK ni dans aucune liste de 2006-2007. Les ajouts de 2008-2009 seront traités aux répétitions (ce sont des exercices tout à fait semblables à ceux dont la solution est donnée).

Partie “Courbes-Surfaces”

Exercice 4.

a) Droite du plan X, Y; équation cartésienne $y + 2x + 1 = 0$

b) Ellipse; équation cartésienne dans le plan X, Y: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) Hyperbole; équation cartésienne dans le plan X, Y: $x^2 - y^2 = 1$

d) Représentation graphique de fonction; courbe= demi-circonférence centrée à l'origine, de rayon 1 et dont les points ont une ordonnée positive; équation cartésienne: $y = \sqrt{1 - x^2}$

e) Circonférence du plan X, Y de centre $(-1, 1/2)$ et de rayon $3/2$; équation cartésienne $x^2+y^2+2x-y = 1$

f) Ellispsoïde; équation cartésienne $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

Exercice 5.

a) Dans le plan: ellipse; paramétrage $(\cos t, (1/2)\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$. Dans l'espace: cylindre elliptique; paramétrage $(\cos t, \frac{\sin t}{2}, s),\ t \in [0, 2\pi],\ s \in \mathbb{R}$

b) Cône circulaire, surface de révolution autour de l'axe Y; paramétrage $(|s| \cos t, s, |s| \sin t),\ t \in [0, 2\pi],\ s \in \mathbb{R}$

c) Ellipsoïde; paramétrage $(\cos t \sin s, \frac{\sin t \sin s}{\sqrt{3}}, \cos s)\ t \in [0, 2\pi],\ s \in [0, \pi]$.

Partie Suite : “Courbes-Surfaces-Intégration”

Item de l'exercice 3 (avec l'arcade de cycloïde)

Longueur. Posons $\vec{\gamma}(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t)] = [t - \sin t, 1 - \cos t]$. On a

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^{2\pi} \|D\vec{\gamma}(t)\|\ dt = 8.$$

Aire. Comme un paramétrage (régulier, injectif) de la surface est donné par

$$\vec{\varphi}(t, v) = [\gamma_1(t), v\gamma_2(t), 0] = [t - \sin t, v(1 - \cos t), 0], \quad t \in [0, 2\pi],\ v \in [0, 1]$$

on a successivement

$$D_t\vec{\varphi} = [1 - \cos t, v \sin t, 0],\ D_v\vec{\varphi} = [0, 1 - \cos t, 0],$$

$$D_t\vec{\varphi} \wedge D_v\vec{\varphi} = [0, 0, (1 - \cos t)^2] = \left[0, 0, \frac{3}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} - 2\cos t\right].$$

Il s'ensuit que

$$\text{Aire demandée} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \|D_t\vec{\varphi} \wedge D_v\vec{\varphi}\| dvdt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} - 2\cos t\right)\ dt = 3\pi.$$