

ANALYSE II

Liste "type" 4

Mardi 21 et mardi 28 octobre 2008

REMARQUES pour les séances de répétition

- Réf: notamment le livre de référence pour le cours, à savoir *Erwin Kreyszig* Chapitre 13
- A la répétition: exercices *

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE, 1ere partie

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des complexes suivants

$$\frac{1+i}{1-2i}, \quad \frac{1}{2i^3-1}.$$

2. (*) Déterminer le module et la valeur principale (ie dans $] -\pi, \pi]$) de l'argument des complexes suivants

$$e^i, \quad (1+i)^{12}, \quad z_1, \quad z_2, \quad z_1 z_2$$

où $z_1 = -2 + 2i$ et $z_2 = 5i$.

3. Déterminer les racines quatrièmes de 1 (resp. $16i$) et en donner une représentation géométrique.
4. (*) Résoudre les équations suivantes (z est une variable complexe)

$$z^2 + 1 = 0, \quad z^4 - 16 = 0, \quad z^4 + 16 = 0, \quad z^2 + z + 1 = 0, \quad z^3 - 1 = 0, \quad z^2 - i = 0.$$

5. Exercices 1-10 EK p617

6. On définit \mathbb{C}^2 comme étant l'ensemble des couples de complexes (appelé encore vecteur à deux composantes complexes). Dans cet ensemble, on définit l'addition et la multiplication par un complexe (par ...), de même que le *produit scalaire*

$$\langle (z_1, z_2), (z'_1, z'_2) \rangle = z_1 \overline{z'_1} + z_2 \overline{z'_2}$$

et la norme

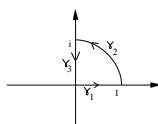
$$\|(z, z')\| = \sqrt{|z|^2 + |z'|^2}.$$

Calculer la norme de $(1, i)$ et le produit scalaire des éléments suivants de \mathbb{C}^2 : $(1, i)$ et $(1 + i, \frac{1}{1+i})$.
Généralisation possible à \mathbb{C}^n .

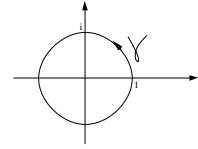
7. a) La série de terme général $1/n!$ converge-t-elle? Pourquoi? En déterminer la somme.
- b) La série de terme général $1/3^m$ converge-t-elle? Pourquoi? En déterminer la somme.
- c) Dans chacun des cas suivants, déterminer si les séries sont absolument convergentes/semi-convergentes. Si besoin, préciser en fonction du complexe z .

- $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-z)^m}{m}$
- $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(10-15i)^m}{m!}$
- $\sum_{m=1}^{+\infty} (1+i)^{-m}$
- $\sum_{m=1}^{+\infty} m^2 \left(\frac{i}{3}\right)^m$

8. (*) Soit $f(z) = |z|$. Calculer $\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz$ pour les chemins C_1 suivants.



Calculer $\int_{\gamma} f(z)dz$ avec $f(z) = z$, $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $f(z) = \frac{1}{z^2}$ et γ



9. Soit

$$S_{\gamma} = \int_{\gamma} \bar{z} dz.$$

- Montrer que, si γ est fermé, alors l'expression $\frac{1}{2i}S_{\gamma}$ est réelle et en donner une interprétation.
- Calculer S_{γ} pour le chemin formé par la juxtaposition du segment joignant l'origine au point de coordonnées (1, 0) et du segment joignant (1, 0) et (1, 1).

10. Déterminer si les fonctions suivantes, prolongées par 0 en 0, sont continues en 0

$$f(z) = \frac{\Re z^2}{|z^2|}, \quad g(z) = |z|^2 \Re \left(\frac{1}{z} \right).$$

11. Montrer que la fonction $f(z) = \Re z$ n'est analytique (holomorphe) en aucun point.
12. Montrer directement que la fonction f définie par $f(z) = \Re(\cos z)$ est harmonique dans \mathbb{R}^2 .
13. Déterminer les parties réelle et imaginaire du complexe $\cos(1 + i)$
14. Résoudre les équations suivantes en la variable complexe z

$$\cos z = 0, \quad \cos z = 1, \quad \cos z = 3, \quad \sinh z = 0.$$

15. (*) Déterminer $\text{Log}_{\pi} z = \text{Log} z = \text{Ln} z$ (resp. $\text{Log}_0 z$) pour les complexes z suivants

$$-10, \quad 2 - 2i, \quad i, \quad -i, \quad e^{-i}.$$

Déterminer les parties réelle et imaginaire des complexes suivants (définition des puissances utilisant Log puis Log_0) :

$$(-i)^i, \quad (-1)^{1+i}.$$

16. (*) Déterminer où les fonctions suivantes sont holomorphes

$$\frac{1}{\sin z}, \quad \frac{1}{z^4 + 1}, \quad \text{Log}_0(1 + z), \quad \frac{\text{Log} z}{z^3 + 1}$$

17. (*) Soit la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$, holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En notant $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x, y) = \Re f(z), \quad Q(x, y) = \Im f(z).$$

Représentez les courbes de niveau de P et de Q . Montrer que celles-ci sont orthogonales (au sens suivant: les tangentes aux points d'intersections sont orthogonales entre elles).

ANALYSE II

Liste "type" 4

Solutions

Les solutions (exercices 1-16) sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be) (solutions à la liste 4 de 2006-2007).