

ANALYSE II

Liste "type" 5

Mardi 28 octobre 2008, mardi 4 novembre 2008

REMARQUES pour les séances de répétition

- A la répétition: exercices *

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE, 2eme partie

On désigne par $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de \mathbb{C} .

1. (*) Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, Ω connexe. Démontrer que s'il existe une constante C telle que $|f| = C$ dans Ω , alors f est constant dans Ω .
2. On suppose Ω connexe. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, démontrer que $\bar{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ si et seulement si f est constant.
3. Soit $f \in C_2(\Omega)$. Démontrer que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si et seulement si on a ($\Delta f = 0$ et $\Delta(zf) = 0$) dans Ω .
4. a) (*) Où les fonctions suivantes sont-elles holomorphes?

$$f_1(z) = \frac{1}{e^z - 1}, \quad f_2(z) = \frac{1}{e^{iz} + i}, \quad f_2(z) = \frac{\sin z}{\sinh z}, \quad f_3(z) = \frac{1}{(z^2 + z + 1)^2}$$

- b) (*) Où la fonction suivante est-elle holomorphe? Quelles en sont les singularités isolées¹?

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}.$$

5. (*) Si γ désigne le chemin simple régulier suivant , calculer

$$a) \int_{\gamma} \Re z \, dz, \quad b) \int_{\gamma} e^{z^2} \, dz, \quad c) \int_{\gamma} \frac{1}{z-2} \, dz, \quad d) \int_{\gamma} \frac{1}{z-\frac{1}{2}} \, dz, \quad e) \int_{\gamma} \frac{1}{z-\frac{i}{2}} \, dz, \quad f) \int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z-\frac{1}{2})^2} \, dz$$

6. (*) EK, p657; 1,2,3,4
7. a) (*) Est-il possible de calculer $\text{Ln}((1+i)^i)$? Pourquoi? Si la réponse est affirmative, calculer ce complexe.
 b) On pose $f_+(z) = \text{Ln}(1+iz)$ et $f_-(z) = \text{Ln}(1-iz)$ et $f(z) = f_+(z) - f_-(z)$. Où cette fonction f est-elle holomorphe?
 c) Montrer que la restriction à \mathbb{R} de la fonction if est une fonction à valeurs réelles. Déterminer cette fonction.
 d) (*) Où la fonction $z \mapsto \frac{z^{1/2}}{z-i}$ est-elle holomorphe?

8. (*) EK, p657; 8,11,14
9. (*) Si $a > 1$ calculer l'intégrale suivante en utilisant la technique des fonctions holomorphes.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos x} dx.$$

10. (*) La fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto \sin z$ est-elle bornée? Pourquoi?
11. (*) Soit la proposition suivante: "la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ tend vers 0 à l'infini". Cette proposition est-elle vraie? fausse? Pourquoi?
 Pourquoi la proposition suivante est-elle fausse? "Il existe une fonction f holomorphe dans la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon 2, qui s'annule en 0 et telle que $f(z) > 0$ pour $|z| = 1$."

¹un complexe z_0 est appelé singularité isolée de f si f est holomorphe dans une boule centrée en z_0 excepté en z_0

12. Montrer que si f est holomorphe dans \mathbb{C} et si $z \mapsto \frac{f(z)}{z}$ est borné dans \mathbb{C}_0 alors la fonction f est un multiple de la fonction $z \mapsto z$.
13. *Références: EK 13.4 et 18.x; voir aussi relation entre égalité des dérivées croisées pour un champ vectoriel $[f_1, f_2]$ et existence d'un champ scalaire dont le gradient est ce champ vectoriel (c'est-à-dire aussi primitivation dans un "bon ouvert" de \mathbb{R}^2)*

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} (\mathbb{R}^2). Pour rappel, une fonction u de classe C_2 dans Ω est dite harmonique dans Ω lorsqu'elle est annulée par le laplacien:

$$\Delta u = D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

Si u est à valeurs réelles, une fonction v de classe C_2 dans Ω , à valeurs réelles, telle que $F = u + iv$ soit holomorphe dans Ω est appelée *conjugué harmonique de u* dans Ω .

Une fonction harmonique u dans un ouvert Ω , à valeurs réelles, admet-elle toujours un conjugué harmonique dans Ω ? Pourquoi? Quelle condition (standard) sur l'ouvert Ω peut-on imposer afin qu'un tel conjugué harmonique existe? Pourquoi?

Interprétation de ces champs, de leurs courbes de niveau: cf notamment EK Ch 18 ("courbes équipotentielles et lignes de forces")

Appliquer ce qui précède à la fonction u définie par $u(z) = u(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \ln(|z|)$ (avec $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$).

ANALYSE II

Liste "type" 5

Solutions

Les solutions sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be) (solutions à la liste 5 de 2006-2007). Seul changement: exercice numéro 2.

Exercice 2. Si f et \bar{f} sont holomorphes, il en est de même de $\Re f = \frac{f+\bar{f}}{2}$ et de $\Im f = \frac{f-\bar{f}}{2i}$. Ces deux fonctions étant à valeurs réelles, holomorphes, elles sont donc constantes dans le connexe Ω ; dès lors f l'est aussi.

Toute fonction constante étant holomorphe, la réciproque est claire.