Analyse II

Liste "type" 6

Mardi 04 novembre 2008, vendredi 14 novembre 2008

REMARQUES pour les séances de répétition
- A la répétition: exercices *

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE, 2eme partie, suite

On désigne par $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

1. - Déterminer le disque de convergence des séries suivantes

$$a)\ (*) \sum_{m=1}^{+\infty} m!\ z^m; \quad b)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}; \quad c)\ (*) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(z-i)^{2m}}{m^3}$$

$$d)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(z-1)^m}{2^m (m!)^2}; \quad e)\ \sum_{m=1}^{+\infty} 4^m\ (z-2)^m; \quad f)\ (*) \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m\ (iz-1)^m$$

   - Voir aussi EK p 677

2. (*) Développer les fonctions suivantes[1] en série de puissances au point z_0 et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu.

$$a)\ \frac{1}{z^2+1},\ z_0=0; \quad b)\ \frac{1}{z},\ z_0=1; \quad c)\ \frac{z}{z^2-1},\ z_0=0; \quad d)\ \frac{z}{(z-1)(z+2)},\ z_0=0$$

$$e)\ \frac{1}{1+z+z^2},\ z_0=0; \quad f)\ \frac{\sin z}{z},\ z_0=0; \quad g)\ \frac{1-\cos z}{z^2},\ z_0=0; \quad h)\ \frac{e^z}{1-z},\ z_0=0.$$

3. En procédant par coefficients indéterminés, montrer que

$$(*) \left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 = 1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{15} + \dots \qquad |z| < \pi$$

   Même question pour

$$e^{z/\cos z} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{2z^3}{3} + \dots \qquad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

4. (*) On donne S et F par

$$S(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} m^2 z^m, \quad F(z) = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}.$$

   Où ces fonctions sont-elles holomorphes (resp. égales)? En déduire la valeur de la somme $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m^2}{2^m}$.

5. Déterminer le disque de convergence et la somme des séries suivantes

$$S_1(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m}, \quad S_2(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m(m+1)}.$$

6. Soit f holomorphe dans $\mathbb{C}$. Montrer que si $\Re f$ (resp. $\Im f$) est borné, alors f est constant.

[1] Le résultat suivant sera démontré dans la suite : Si f est holomorphe dans $\omega \setminus \{z_0\}$ (ω=voisinage de z_0) et si $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans ω

7. Si f est holomorphe dans Ω et si z_0 est un zéro d'ordre p pour f, montrer que

$$|f(z)| \leq \frac{|z-z_0|^p}{r^p} \sup_{\{u\,:\,|u-z_0|=r\}} |f(u)|$$

si $|z-z_0| < r$ et $0 < r < dist(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.

8. (*) On suppose f et g holomorphes dans l'ouvert connexe Ω. Montrer que si le produit de f et g est nul en tout point de Ω alors f est nul en tout point de Ω ou g est nul en tout point de Ω.

Analyse II

Liste "type" 6

Solutions

Les solutions sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be) (solutions à la liste 6 de 2006-2007).