

ANALYSE II

Liste "type" 8

Mardi 25-11-08, mardi 02-12-08 (note: vendredi 5-12, un TD est prévu)

REMARQUES pour les séances de répétition

- A la répétition: exercices *
- le vendredi 5-12, un TD est prévu

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE, 2eme partie, suite

RESULTAT AUXILIAIRE (prolongements holomorphes)

Etant donné une fonction holomorphe définie de façon naturelle (souvent explicitement, analytiquement) dans un ouvert de \mathbb{C} , il est utile d'essayer de trouver une fonction holomorphe qui la prolonge dans un ouvert plus grand.

Par exemple, la fonction $\sqrt{1-z^2} := (1-z)^{1/2}(1+z)^{1/2}$ est définie de façon naturelle dans $U = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup]-1, 1[$ et y est holomorphe. Elle étend la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in]-1, 1[$.

La fonction $\sqrt{z^2-1} := (z-1)^{1/2}(z+1)^{1/2}$ est aussi définie de façon naturelle dans le complémentaire de $[-1, +\infty[$ ou dans le complémentaire de $] -\infty, 1]$. On peut l'étendre dans le complémentaire du segment $[-1, 1]$, ce qui donne alors une extension holomorphe à la fonction $\sqrt{x^2-1}$, $x > 1$ par exemple.

Plus précisément, on a le résultat suivant (il en existe d'autres; ils sont basés sur le calcul d'arguments).

Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$, $a < b$, et soient

$$f(z) = \operatorname{Ln}(z-a) - \operatorname{Ln}(z-b), \quad g(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta.$$

Chacune de ces fonctions est définie et holomorphe dans le complémentaire d'une demi-droite. Chacune peut se prolonger holomorphiquement dans le complémentaire du segment $[a, b]$.

EXERCICES

1. (*) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées de chacune des fonctions de l'exercice 5, liste 7 de 2008-2009.
2. EK, p 717 : de 3 à 12
3. EK, p 717 : de 14 à 25
4. Soit $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ ($r > 1$) et soit $\sqrt{z^2-1} := \sqrt{z-1}\sqrt{z+1}$ (avec détermination principale de l'argument). Montrer que

$$I_r = \int_{\gamma_r} \sqrt{z^2-1} dz = -i\pi.$$

Suggestion. La fonction $f(z) = \sqrt{z+1}\sqrt{z-1}$ (notée $\sqrt{z^2-1}$) est holomorphe dans $\Omega := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Méthode 1. La fonction $F(z) = \sqrt{1+z}\sqrt{1-z}$ est holomorphe dans le complémentaire de $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et on a $f(z) = zF(1/z)$ dans Ω . On obtient $I_r = ir \int_0^{2\pi} dt e^{it} f(re^{it}) = \int_{\gamma_{1/r}} dz \frac{F(z)}{z^3} = i\pi D^2 F(0) = -i\pi$.

Méthode 2. Au signe près, l'intégrale à calculer est égale à l'intégrale de la même fonction sur le contour "en haltères" autour de -1 et de 1 , contour que l'on ramène sur le segment $[-1, 1]$ par passage à la limite.

5. Soit $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calculer

$$(*) (a) \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z \sinh z} dz, \quad (*) (b) \int_{\gamma} \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} dz, \quad (c) \int_{\gamma} e^{\frac{1}{z}} dz$$

$$(*) (d) \int_{\gamma} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \quad (*) (e) \int_{\gamma} \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} dz$$

6. Soit γ un chemin injectif régulier “orienté” aire à gauche qui paramétrise la courbe $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = 1\}$. Calculer

$$a) \int_{\gamma} \frac{\operatorname{Ln} z}{z + 2} dz, \quad b) \int_{\gamma} \frac{\operatorname{Ln} z}{z - 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}} dz.$$

7. - (*) Soit γ un chemin régulier par morceaux, injectif, “orienté” aire à gauche et qui paramétrise le bord du carré de sommets $0, 3, 3 + 3i, 3i$. Calculer

$$a) \int_{\gamma} \frac{1}{z + 1 + i} dz \quad b) \int_{\gamma} \frac{1}{z - 1 - i} dz.$$

- Soit $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$. Calculer

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^4(z + 1 + 2i)} dz$$

8. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes

$$(*) (a) \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4 \sin x} dx, \quad (*) (b) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx, \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^6} dx,$$

$$(*) (d) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^3} dx, \quad (*) (e) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

9. (Transformation de Joukowski) On donne la fonction f par

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

- (a) En quel type de courbe cette fonction transforme-t-elle les cercles centrés à l’origine de rayon différent de 1 (resp. les segments de droites)?
- (b) Graphiquement montrer que cette fonction transforme les cercles passant par le point de coordonnées $(1, 0)$ (resp. $(-1, 0)$) en “profil d’aile d’avion”.
- (c) Montrer que f établit une bijection de $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. En déterminer l’inverse et montrer qu’il s’agit encore d’une fonction holomorphe.

ANALYSE II

Liste “type” 8

Solutions

Les solutions sont disponibles en format pdf à partir du site web

<http://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html>

et des pages relevant du cours

Analyse II, Math0007-4, 2 bac Inges

rubrique “solutions à la liste 8 de 2006-2007”