Analyse II

Liste “type” 9

Mardi 09 décembre 2008, vendredi 12 décembre 2008

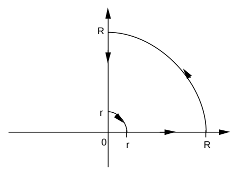
REMARQUES pour les séances de répétition
- A la répétition: exercices *

FONCTIONS D’UNE VARIABLE COMPLEXE, suite et fin

EXERCICES

1. Calculer $(a, \lambda > 0)$
$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{a^2+x^2} dx, \quad (2) \int_0^{\to +\infty} \frac{x \sin(\lambda x)}{x^2+a^2} dx$$

2. (*) Intégrer la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ sur le contour suivant



En déduire que
$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\cos(t) - e^{-t}}{t} dt = 0.$$

3. Calculer les intégrales suivantes
$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)\sqrt{x}} dx, \quad (b) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(4x^2+2x+1)^4} dx$$

4. Calculer les intégrales suivantes $(m \in \mathbb{R})$
$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^4+1} dx, \quad (b) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(x+1)^2} dx, \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x+1} dx$$
$$(d) \int_0^2 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{4-x^2}} dx, \quad (e) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{x^4+x^2+1} dx, \quad (f) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$$
(*Suggestion pour (d):* Utiliser le changement de variable $y = \frac{4}{x^2} - 1$; on a $\int_0^2 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{\sqrt{5}}{10} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}\,(y+1)} dy$

5. (*) Soient des réels strictement positifs a, b. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(a+ix)^2(b+ix)^2} dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(a+ix)^2(b-ix)^2} dx = \frac{4\pi}{(a+b)^3}.$$

6. Soit $\theta \in]0, 1[$. Montrer que
$$\int_0^1 x^{\theta-1}(1-x)^{-\theta} dx = \int_0^1 x^{-\theta}(1-x)^{\theta-1} dx = \int_0^{+\infty} dy \, \frac{y^{\theta-1}}{1+y} = \frac{\pi}{\sin(\pi\theta)}.$$
(*Suggestion :* Utiliser le changement de variable $y = \frac{x}{1-x}$ de $]0, 1[$ dans $]0, +\infty$ et calculer la dernière intégrale par méthodes de variables complexes)

7. Si f est conforme et si u est harmonique alors $F = u(\Re f, \Im f)$ est harmonique.

8. (*Eventuel) Soit l'opérateur $L(D_t) = 1 + iD_t - 3D_t^2 + 5D_t^4$. On pose $L(z) = 1 + iz - 3z^2 + 5z^4$. Montrer qu'il existe $R_0 > 0$ tel que

$$f(t) = \int_{\gamma_R} P(z) \frac{e^{zt}}{L(z)} dz, \ \gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}(\theta \in [0, 2\pi]), R \geq R_0$$

soit défini quel que soit $t \in \mathbb{R}$, quel que soit le polynôme P et soit indépendant de R. Montrer que $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ et que

$$L(D_t)f = 0.$$

9. Vrai ou faux? Justifier.

   - Si f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et admet une limite nulle à l'infini, alors f est nul dans $\mathbb{C}$.
   - La fonction $z \mapsto \overline{\exp(\overline{z})}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.
   - Si la fonction f, holomorphe dans $\mathbb{C}$, admet un zéro de multiplicité 1 en 0, alors la fonction $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ admet un pôle d'ordre 1 en 0.
   - La fonction $z \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} (z-i)^m$ est holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

10. Où les fonctions f_1, f_2 suivantes sont-elles holomorphes? Déterminer leurs singularités isolées, ainsi que leur type. Calculer le résidu en chacune de ces singularités.

$$f_1(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} z^m, \qquad f_2 = \frac{Df}{f}$$

(f est holomorphe dans un ouvert Ω et y a pour zéros les complexes distincts $z_1, \ldots, z_J$ de multiplicité respective $\alpha_1, \ldots, \alpha_J$.)

11. On donne une fonction f, holomorphe dans Ω, complémentaire dans $\mathbb{C}$ des entiers négatifs ou nul. On suppose que l'on a

$$f(1) = 1, \quad f(z+1) = zf(z), \ \forall z \in \Omega.$$

Chaque entier négatif est une singularité isolée; en déterminer le type et calculer le résidu correspondant.

12. a) Si $\alpha, \beta > 0$ déterminer la transformée de Laplace inverse de

$$F(z) = \frac{e^{-\alpha z}}{z + \beta}.$$

b) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$, continue sauf en un nombre fini de points. Si $G(t) = \int_0^t g(u)du$, montrer que

$$\mathcal{L}_p G = \frac{\mathcal{L}_p g}{p}, \quad p \in \mathbb{C}, \Re p > 0.$$

c) Soient des constantes strictement positives C (capacité), R (résistance) et soit v une fonction bornée (force électromotrice). Si $V_0 > 0$, $0 < t_0 < t_1$ et si $v(t) = V_0 \chi_{[t_0,t_1]}(t)$, déterminer l'intensité i du courant dans le circuit RC en utilisant la technique de la transformation de Laplace et transformation inverse, en utilisant les points précédents et sachant que i vérifie l'équation

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(y) \ dy \ = \ v(t).$$

FB, December 6, 2008(V1:12-11-06)

Analyse II

Liste “type” 9

Solutions

Les solutions aux *exercices 1-8* sont disponibles en format pdf à partir du site web

http://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html

et des pages relevant du cours

Analyse II, Math0007-4, 2 bac Inges

rubrique “solutions à la liste 9 de 2006-2007”

Suggestion pour l'exercice 9. (réf: EK, pp237-238)
a) Le calcul donne

$$\mathcal{L}_x^{-1} F = e^{-\beta(x-\alpha)} \chi_{]\alpha,+\infty[}(x).$$

b) Permuter les intégrales dans l'expression de la transformée de G.
c) Prendre la transformée de Laplace des deux membres de l'égalité. Utiliser b). Si I désigne la transformée de i, cette fonction est alors donnée par

$$I(p) = \frac{V_0\left(e^{-pt_0} - e^{-pt_1}\right)}{R\left(p + \frac{1}{RC}\right)}.$$

Vu le point a), on obtient finalement

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ \frac{V_0}{R} e^{\frac{t_0}{RC}}\ e^{-\frac{t}{RC}} & \text{si } t_0 < t < t_1 \\ \frac{V_0}{R}\left(e^{\frac{t_0}{RC}} - e^{\frac{t_1}{RC}}\right)\ e^{-\frac{t}{RC}} & \text{si } t_1 < t \end{cases}$$