Analyse II Liste supplémentaire

1. *Le problème de Dirichlet dans une boule*

   Etant donné une fonction à valeurs réelles g, continue sur le bord ∂B de la boule $B = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < r\}$, on se propose de résoudre le problème de Dirichlet dans B, c'est-à-dire de trouver une fonction réelle v, deux fois continûment dérivable dans B, contnue sur $\overline{B}$ telle que

   $$\Delta v = 0 \text{ dans } B, \qquad v = g \ \text{ sur } \partial B.$$

   On pose $\gamma_r(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.

   (a) Montrer que la fonction f définie dans B par

   $$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{u+z}{u(u-z)} g(u)\ du$$

   y est holomorphe. En déduire que sa partie réelle v vérifie $\Delta v = 0$ dans B.

   (b) Montrer que pour tout $z \in B$, on a

   $$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{u+z}{u(u-z)} du = 1$$

   et déduire que

   $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} dt = 1.$$

   (c) On pose

   $$P(z,u) = \frac{r^2 - |z|^2}{|u-z|^2}.$$

   Montrer que si $z_0, u \in \partial B$, si $z \in B$ et $\delta > 0$ sont tels que $|z - z_0| \leq \delta \leq |u - z_0|$, alors

   $$P(z,u) \leq \frac{r^2 - |z|^2}{(\delta - |z - z_0|)^2}$$

   donc

   $$\lim_{z \to z_0} \sup_{u \ |u-z_0| \geq \delta} P(z,u) = 0.$$

   En déduire que la partie réelle v de f est égale à u sur le bord de B.

   (d) Par le principe du maximum, on montre que la solution est unique.

Analyse II

Liste supplémentaire, solutions