Analyse II Liste pour le TD du 05 décembre 2008

Exercice 1.

Soit le cylindre d'axe Z, dont la base est le disque centré à l'origine, de rayon r, limité par le plan $z = 0$ et $z = h$ $(r, h > 0)$. On considère la surface $\mathcal{S}$, formée de la surface latérale de ce cylindre "limité" , ainsi que par son "couvercle", i.e. la surface horizontale à la hauteur h qu'il découpe sur le plan $z = h$. On donne aussi la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y, z) = [x^2y, 0, xyz]$. Vérifier la formule de Stokes pour $\vec{f}$ et la surface $\mathcal{S}$

Exercice 2. On donne les fonctions

$$f(x, y) = x^2 - 4y^2, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x.$$

a) Déterminer et représenter quelques courbes de niveau de ces fonctions.
b) Déterminer un paramétrage de chaque courbe de niveau.
c) Déterminer un vecteur normal à la surface d'équation $z = f(x, y)$ à l'origine, de même que l'équation du plan tangent et deux vecteurs linéairement indépendants de ce plan.

Exercice 3. Calculs de surfaces sphériques.

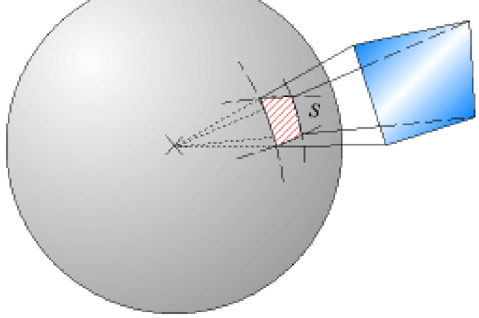
Un *angle solide* (mesure de l'angle solide) est l'analogue tridimensionnel de l'angle plan ou bidimensionnel. Dans l'espace bidimensionnel, l'angle plan (mesure de l'angle plan) est défini comme le rapport de la longueur de l'arc sur le rayon d'un cercle; dans l'espace tridimensionnel, (la mesure de) *l'angle solide est défini* de façon analogue comme le rapport de la surface d'une partie d'une sphère sur le rayon au carré. Son unité est le stéradian noté *sr*.

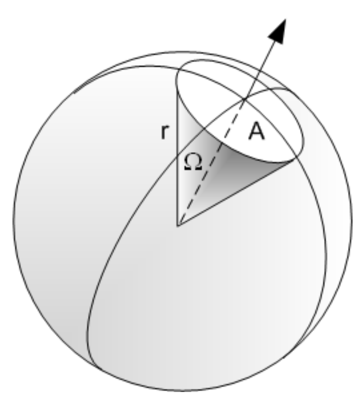
Un angle solide est souvent noté Ω (oméga majuscule). Il mesure la surface sur laquelle un objet se projette radialement sur une sphère de rayon unité.

Le stéradian est défini comme étant (la mesure de) l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère découpe sur la surface de cette sphère une aire égale à celle d'un carré dont le côté est égal au rayon de la sphère. Autrement dit, un angle solide d'un stéradian délimite sur la sphère unité à partir du centre de cette sphère une surface d'aire 1. Pour une sphère complète, l'angle solide vaut donc 4π stéradians. Le stéradian est une quantité sans dimension. Dans la pratique, le symbole *sr* est utilisé lorsque cela s'avère utile plutôt que de ne pas mettre d'unité du tout.

Par exemple, le regard d'un œil humain embrasse environ 0,5 sr.

Exercice: quelle est la mesure, en stéradians, de l'angle solide déterminé par un cône circulaire de mesure d'angle au sommet égale à θ (radians)?





Exercice 4. Déterminer la valeur des intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{7z-6}{z^2-2z} dz$ où γ est la courbe d'équation cartésienne $x^2+y^2-2x-3=0$ (on suppose que la courbe est orientée "aire à gauche")

b) $\displaystyle\int_\gamma \Re(2z)\ dz$ où γ est la juxtaposition de la demi-circonférence centrée à l'origine, de rayon 1, dont les points sont d'ordonnées positives et du segment joignant le points de coordonnées $(-1,0)$ et $(1,0)$ (orientation comme dans le cas précédent).

Exercice 5. On donne les fonctions suivantes

$$f_1(z) = \frac{e^{1/(z-i)}}{z^2+1}, \quad f_2(z) = e^{1/z} \sin z, \quad f_3(z) = \frac{1-\cos z}{z^3}.$$

Pour chacune de ces fonctions, répondre aux questions suivantes.
- Où la fonction est-elle holomorphe?
- Quels sont ses zéros? Quelles en sont les multiplicités respectives?
- Quelles sont ses singularités isolées? De quels types sont-elles?
- Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.

Exercice 6. Déterminer si les intégrales suivantes ont un sens (pour la seconde, préciser les valeurs du paramètre α). En déterminer ensuite la valeur, par des techniques de variables complexes

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

Analyse II

TD du 05/12/08, solutions