Analyse II, 2e bachelier Ingénieur civil, 2008-2009

Examen de première session

Lundi 5 janvier 2009 , 08:30-12:30 ; Amphi Europe 604
Pas de calculatrice, gsm, ...

THEORIE (40 points)

1. 1.1) Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Enoncer ce que l'on appelle "formule de représentation intégrale de Cauchy pour f et ses dérivées". Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.

   1.2) Enoncer et démontrer le résultat donnant le développement en série de puissances d'une fonction holomorphe dans un ouvert (développement de Taylor). Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.

2. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace de Hilbert H puis, en guise d'application, l'énoncer dans l'espace $H = L^2([0,1])$ (en précisant la signification des notations employées).

EXERCICES (60 points)

Question 1 Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches. On fixe un repère orthonormé de l'espace.

1.1) On considère la surface d'équation cartésienne $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ située entre les plans d'équation $z = 0$ et $z = 1$ et la fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z) = [y,x,z]$. Si $\vec{n}$ est la normale unitaire (après choix d'orientation) à la surface, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int\int_{\mathcal{S}} \vec{n} \bullet \vec{f}\, d\sigma$$

1.2) Si $\vec{r} = [x,y,z]$ et si $\vec{a}$ est un vecteur constant, montrer que le rotationnel du champ $\vec{a} \wedge \vec{r}$ est constant et déterminer cette constante.

Question 2 Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches.

2.1) On donne les fonctions f et g par

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, \quad g(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$$

a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes?
b) Quels sont leurs zéros? Quelles en sont les multiplicités respectives?
c) Quelles sont les singularités isolées? De quels types sont-elles?
d) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
e) Pour f, déterminer le développement de Laurent en chacune des singularités isolées.

2.2) Soit γ le bord du carré centré l'origine, de longueur de côté égale à 2. On considère qu'on parcourt ce bord "aire à gauche" et qu'on utilise un paramétrage injectif. Déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$\int_\gamma \Re z\, dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{2z-i} dz$$

2.3) Déterminer la valeur des intégrales suivantes par "méthode de variables complexes"

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+ix)^4} dx$$

Question 3 Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches.

3.1) Dans l'espace $L^2([-1,1])$ on a le développement suivant

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1.

3.2) Déterminer la transformée de Fourier $(-)$ de la fonction suivante

$$f(x) = \cos x \;\; e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Question 4 Répondre par vrai ou faux et justifier la réponse.

a) Si f est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et si 0 est singularité essentielle de f, alors 0 est aussi singularité essentielle de $F \;:\; z \mapsto \frac{f(1/z)}{z}$
Vrai □ Faux □

b) Si f est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ et si le résidu de f en z_0 est nul, alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$
Vrai □ Faux □

c) La fonction $z \mapsto \exp(iz)$ est bornée dans $\mathbb{C}$.
Vrai □ Faux □

d) Il existe une fonction intégrable f telle que $\mathcal{F}_y^- f = \frac{y^2}{1+y^2}, \; y \in \mathbb{R}$.
Vrai □ Faux □

Les réponses numériques sont les suivantes (celles-ci ne sont pas nécessairement dans l'ordre des questions, peuvent correspondre à plusieurs questions et il peut y avoir un changement de signe en fonction de l'orientation choisie)

$$0, \quad \frac{1}{6}, \quad 1, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}, \quad -\frac{4}{\pi^2}, \quad 4i, \quad i\pi$$