Analyse II Liste pour le TD du 05 décembre 2008

Exercice 1.

Soit le cylindre d'axe Z, dont la base est le disque centré à l'origine, de rayon r, limité par le plan $z = 0$ et $z = h$ $(r, h > 0)$. On considère la surface $\mathcal{S}$, formée de la surface latérale de ce cylindre "limité" , ainsi que par son "couvercle", i.e. la surface horizontale à la hauteur h qu'il découpe sur le plan $z = h$. On donne aussi la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y, z) = [x^2 y, 0, xyz]$. Vérifier la formule de Stokes pour $\vec{f}$ et la surface $\mathcal{S}$

Exercice 2. On donne les fonctions

$$f(x, y) = x^2 - 4y^2, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x.$$

a) Déterminer et représenter quelques courbes de niveau de ces fonctions.
b) Déterminer un paramétrage de chaque courbe de niveau.
c) Déterminer un vecteur normal à la surface d'équation $z = f(x, y)$ à l'origine, de mÍme que l'équation du plan tangent et deux vecteurs linéairement indépendants de ce plan.

Exercice 3. Calculs de surfaces sphériques.

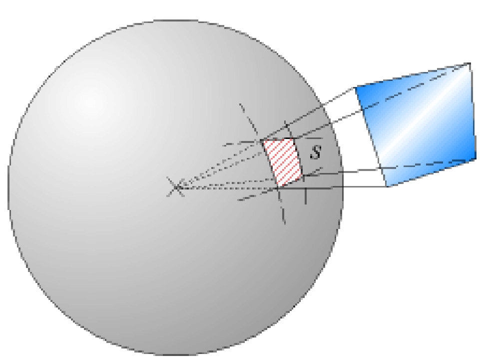
Un *angle solide* (mesure de l'angle solide) est l'analogue tridimensionnel de l'angle plan ou bidimensionnel. Dans l'espace bidimensionnel, l'angle plan (mesure de l'angle plan) est défini comme le rapport de la longueur de l'arc sur le rayon d'un cercle ; dans l'espace tridimensionnel, (la mesure de) *l'angle solide est défini* de façon analogue comme le rapport de la surface d'une partie d'une sphère sur le rayon au carré. Son unité est le stéradian noté *sr*.

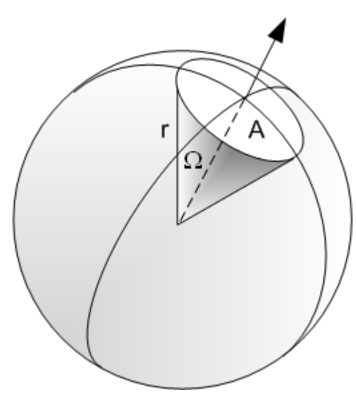
Un angle solide est souvent noté Ω (oméga majuscule). Il mesure la surface sur laquelle un objet se projette radialement sur une sphère de rayon unité.

Le stéradian est défini comme étant (la mesure de) l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère découpe sur la surface de cette sphère une aire égale à celle d'un carré dont le côté est égal au rayon de la sphère. Autrement dit, un angle solide d'un stéradian délimite sur la sphère unité à partir du centre de cette sphère une surface d'aire 1. Pour une sphère complète, l'angle solide vaut donc 4π stéradians. Le stéradian est une quantité sans dimension. Dans la pratique, le symbole *sr* est utilisé lorsque cela s'avère utile plutôt que de ne pas mettre d'unité du tout.

Par exemple, le regard d'un œil humain embrasse environ 0,5 sr.

Exercice : quelle est la mesure, en stéradians, de l'angle solide déterminé par un cône circulaire de mesure d'angle au sommet égale à θ (radians) ?





Exercice 4. Déterminer la valeur des intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{7z-6}{z^2-2z}dz$ où γ est la courbe d'équation cartésienne $x^2+y^2-2x-3=0$ (on suppose que la courbe est orientée "aire à gauche")

b) $\displaystyle\int_\gamma \Re(2z)\ dz$ où γ est la juxtaposition de la demi-circonférence centrée à l'origine, de rayon 1, dont les points sont d'ordonnées positives et du segment joignant le points de coordonnées $(-1,0)$ et $(1,0)$ (orientation comme dans le cas précédent).

Exercice 5. On donne les fonctions suivantes

$$f_1(z)=\frac{e^{1/(z-i)}}{z^2+1},\quad f_2(z)=e^{1/z}\sin z,\quad f_3(z)=\frac{1-\cos z}{z^3}.$$

Pour chacune de ces fonctions, répondre aux questions suivantes.
- Où la fonction est-elle holomorphe ?
- Quels sont ses zéros ? Quelles en sont les multiplicités respectives ?
- Quelles sont ses singularités isolées ? De quels types sont-elles ?
- Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.

Exercice 6. Déterminer si les intégrales suivantes ont un sens (pour la seconde, préciser les valeurs du paramètre α). En déterminer ensuite la valeur, par des techniques de variables complexes

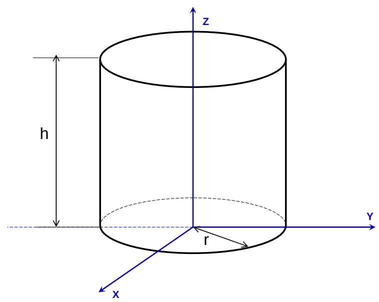
$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos x}dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx.$$

FB, 21 décembre 2008(V1 :13-11-08)

Analyse II

TD du 05/12/08, solutions - résumé

Exercice 1 La surface $\mathcal{S}$ est formée de 2 parties (2 portions régulières) : la surface "latérale" $\mathcal{S}_1$ et la surface "couvercle" $\mathcal{S}_2$.



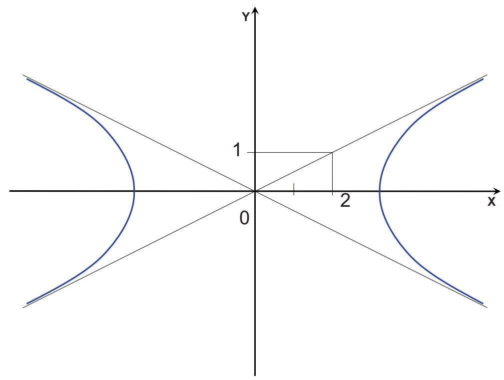
Soient les deux intégrales :

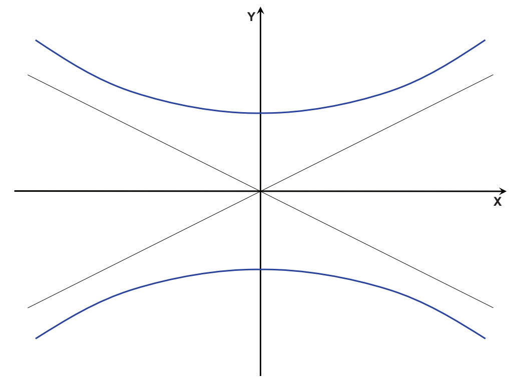
$$I = \int\int_{\mathcal{S}^+} \mathbf{rot}\vec{f} \bullet \vec{n}\, d\sigma \qquad II = \int_{\mathcal{C}^+} \vec{f} \bullet \vec{t}\, ds$$

On doit montrer que $I = II$.

1. Paramétrisation des surfaces et de la courbe :
$$\mathcal{S}_1 : \qquad \vec{\varphi}_1(\theta, z) = [r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z], \qquad z \in [0, h]\ \&\ \theta \in [0, 2\pi]$$
$$\mathcal{S}_2 : \qquad \vec{\varphi}_2(\theta, t) = [t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ h], \qquad t \in [0, r]\ \&\ \theta \in [0, 2\pi]$$
Orientation "normale vers l'extérieur" :
$$D_\theta\vec{\varphi}_1 \wedge D_z\vec{\varphi}_1 = [r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0] \quad pour \quad \mathcal{S}_1$$
$$D_t\vec{\varphi}_2 \wedge D_\theta\vec{\varphi}_2 = [0,\ 0,\ t] \quad pour \quad \mathcal{S}_2$$
$\mathcal{C}^+$ a pour paramétrage $\vec{\gamma}(\theta) = [r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0]$, $\theta \in [0, 2\pi]$; $D\vec{\gamma}(\theta) = [-r\sin\theta, r\cos\theta, 0]$.
2. On a aussi
$$\mathbf{rot}\vec{f} = [xz,\ -yz,\ -x^2]$$
3. Avec ces divers éléments, on obtient d'une part
$$\begin{aligned}
I &= \int\int_{\mathcal{S}^+} \mathbf{rot}\vec{f} \bullet \vec{n}\, d\sigma \\
&= \int\int_{\mathcal{S}_1^+} \mathbf{rot}\vec{f} \bullet \vec{n}\, d\sigma + \int\int_{\mathcal{S}_2^+} \mathbf{rot}\vec{f} \bullet \vec{n}\, d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^h \Big(r^2 z\cos^2\theta - r^2 z\sin^2\theta\Big)\, d\theta dz + \int_0^{2\pi}\int_0^r \Big(-t^3\cos^2\theta\Big)\, d\theta dt \\
&= r^2\int_0^{2\pi}\int_0^h z\cos(2\theta) d\theta dz - \int_0^r t^3 dt \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \\
&= -\int_0^r t^3 dt\ \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = -\frac{\pi r^4}{4}
\end{aligned}$$
et d'autre part
$$II = -\int_0^{2\pi} r^4\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta = -\frac{r^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2\theta) d\theta = -\frac{\pi r^4}{4}$$
D'où $I = II$.

Exercice 2 1. Les courbes de niveau de f sont des hyperboles ou l'union des deux droites d'équation cartésienne $x - 2y = 0$ et $x + 2y = 0$ (cas $f = 0$).



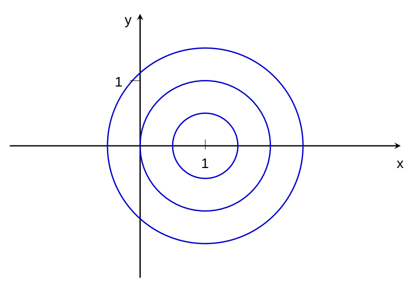


$f(x, y) = r \quad avec \quad r > 0$ $\qquad\qquad$ $f(x, y) = r \quad avec \quad r < 0$

Les courbes de niveau de g sont des cercles, un point ou le vide. On a en effet

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 - 1 = r \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = r + 1$$

donc on obtient un cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon $\sqrt{r+1}$ lorsque $r + 1 > 0$, le point $(1, 0)$ lorsque $r = -1$ et le vide lorsque $r + 1 < 0$.



2. Paramétrage de $g(x, y) = r$ lorsque $r + 1 > 0$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 1 + \sqrt{r+1}\ \cos t \\ y = \sqrt{r+1}\ \sin t \end{array} \right. \quad t \in [0, 2\pi]$$

Paramétrage de $f(x, y) = r$ avec $r > 0$ (2 branches)

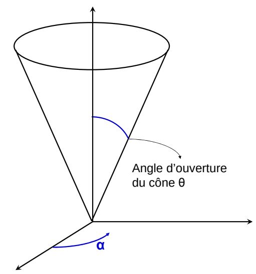
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{4y^2 + r}, \quad y \in \mathbb{R} \\ y = y \end{array} \right. \qquad \& \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{4y^2 + r}, \quad y \in \mathbb{R} \\ y = y \end{array} \right.$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\cosh t}{\sqrt{r}} \\ y = \frac{\sinh t}{2\sqrt{r}} \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R} \qquad \& \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\cosh t}{\sqrt{r}} \\ y = \frac{\sinh t}{\sqrt{r}} \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$$

Analogue pou $r < 0$; pour $r = 0$, comme il s'agit de deux droites, on utilise un paramètrage standard, (linéaire).

Exercice 3 Il s'agit de calculer $A = \int\int_{\mathcal{S}} d\sigma$ c'est-à-dire l'aire de $\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est une partie de la sphère bien définie par le contexte.



L'angle d'ouverture du cône θ (mesure de l'angle entre l'axe et une génératrice) (NB : parfois on prend deux fois cette mesure comme définition de départ).
On a le paramétrage suivant pour la sphère de rayon 1 :

$$\vec{\varphi}(\alpha, t) = [\cos\alpha \sin t,\ \sin\alpha \sin t,\ \cos t] \qquad \alpha \in [0, 2\pi], t \in [0, \pi]$$

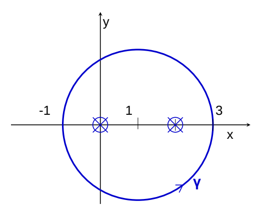
et la longueur de la normale associée est $||D_\alpha \vec{\varphi} \wedge D_t \vec{\varphi}|| = \sin t$. Ainsi l'aire cherchée est

$$A = \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \sin t \, dt d\alpha = 2\pi \int_0^\theta \sin t \, dt = 2\pi(1 - \cos\theta)$$

Exercice 4 Cas de l'intégrale de

$$f(z) = \frac{7z - 6}{z^2 - 2z} = \frac{7z - 6}{z(z-2)}$$

La fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{0, 2\}$; 0 et 2 sont des singularités isolées de type pôle ; ceux-ci sont d'ordre 1.

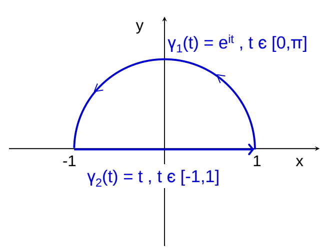


$$\gamma(t) = 1 + 2e^{it} = [1 + 2\cos t,\ 2\sin t] \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Par le théorème des résidus, on a

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi\Big(Res_0 f + Res_2 f\Big) = 14i\pi$$

b) Cas de l'intégrale de $\Re z$.
Cette fonction est continue dans $\mathbb{C}$ (et n'est pas holomorphe) ; on peut donc considérer son intégrale sur une juxtaposition de chemins réguliers. Si γ désigne la juxtaposition de γ_1 et γ_2, on a



$$\int_\gamma \Re(2z)dz = \int_0^\pi 2\cos t . ie^{it} dt + \int_{-1}^1 2t.1 dt = i\int_0^\pi (e^{it} + e^{-it})e^{it} dt = i\int_0^\pi dt = i\pi$$

Exercice 5 Cas de f_1

$$f_1(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-i}}}{z^2+1}$$

La fonction f_1 est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{-i,i\}$ et n'a pas de zéro ; $-i$ est un pôle simple ; i est une singularité essentielle.
On a directement

$$Res_{-i}f_1 = Res_{-i}\frac{\frac{e^{\frac{1}{z-i}}}{z-i}}{z+i} = \frac{\frac{e^{\frac{1}{-2i}}}{-2i}}{1} = \frac{e^{i/2}}{-2i} = \frac{ie^{i/2}}{2}$$

Calculons le résidu de f_1 en i, singularité essentielle. Soit $\gamma = i + \delta e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ avec $0 < \delta < 2$. On a successivement

$$\begin{aligned}
Res_i f_1 &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z-i}}}{(z-i)(z+i)}dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{1}{\delta e^{it}}}}{(\delta e^{it})(2i+\delta e^{it})} i\delta e^{it}dt \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{e^{-it}}{\delta}}}{2i+\delta e^{it}} idt \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{e^{-it}}{\delta}}}{\frac{2i}{\delta}e^{-it}+1}\frac{i}{\delta}e^{-it}dt \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0} \frac{e^z}{2iz+1}dz, \quad \text{avec } \gamma_0(t) = \frac{1}{\delta}e^{it},\ t \in [0, 2\pi], \\
&= Res_{\frac{-1}{2i}} \frac{e^z}{2iz+1} = \frac{e^{\frac{-1}{2i}}}{2i} \\
&= \frac{-ie^{\frac{i}{2}}}{2}
\end{aligned}$$

Cas de f_2 La fonction f_2 est holomorphe dans $\mathbb{C}_0$; 0 est une singularité essentielle isolée ; les zéros de f_2 sont $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}_0$; ce sont des zéros simples. On a

$$Res_0 f_2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m)!(2m-1)!}$$

Cas de f_3. *Cet exercice fait partie des questions d'examen du mois d'août 2008. Ci-dessous figure la correction que l'on peut déjà trouver dans les documents de l'année académique 2007-2008.*
Vu son expression (quotient de deux fonctions holomorphes dans le plan complexe), cette fonction est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur, à savoir dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Les zéros sont les complexes non nuls qui annulent le numérateur, à savoir $2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$). Chacun de ces zéros est un zéro double du numérateur (car $D(1 - \cos z) = \sin z$ est nul en ces points et $D^2(1 - \cos z) = \cos z$ est non nul) donc est un zéro double de f.
La seule singularité isolée est 0 ; il s'agit d'un pôle d'ordre 1 car $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + z^4F(z)$ avec F holomorphe dans $\mathbb{C}$ (explicitement $F(z) = \sum_{m=2}^{+\infty}(-1)^m \frac{z^{2(m-2)}}{(2m)!}$) donc

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3} = \frac{1}{2z} - zF(z).(*)$$

On obtient directement le résidu à partir de (*)

$$Res_0 f = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2} - z^2F(z)\right) = \frac{1}{2}.$$

L'expression (*) donne immédiatement $h(z) = -zF(z)$, $H(z) = 2z$ (en utilisant les notations habituelles du développement de Laurent).

Exercice 6 Les deux intégrales ont bien un sens, en prenant $\alpha \in]0,1[$.

Pour calculer la première, on pose $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $z_0 = -2 + \sqrt{3}$. On a alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 + e^{ix} + e^{-ix}} dx = \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{dz}{1+4z+z^2} = 4\pi Res_{z_0} f = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

La seconde intégrale fait partie de la liste 9 de l'année académique 2006-2007 ; la solution ci-dessous peut déjà être trouvée dans la correction de cette liste.

Considérons la fonction

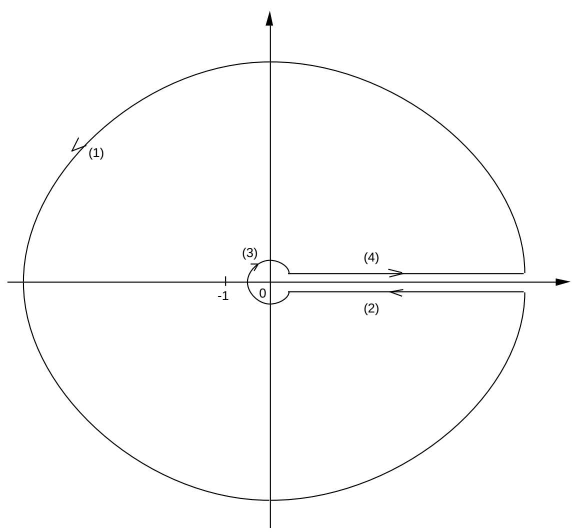
$$f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{z+1} = \frac{e^{\alpha Log_0(z)}}{z(z+1)}$$

holomorphe dans $\Omega_0 \setminus \{-1\}$ avec $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Pour tous réels $\varepsilon, \varepsilon', R$ tels que $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1 < R$, le chemin

$$\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}$$

formé par la juxtaposition des quatre chemins suivants

$$\begin{aligned}
\gamma^{(1)}_{\varepsilon',R}(t) = Re^{it}, &\qquad t \in [\arctan(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{R^2-\varepsilon'^2}}), 2\pi - \arctan(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{R^2-\varepsilon'^2}})] \\
\gamma^{(3)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(t) = \varepsilon e^{-it}, &\qquad t \in [\arctan(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}}), 2\pi - \arctan(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}})] \\
\Gamma^{(4)}_{\varepsilon,\varepsilon',R}(t) = t + i\varepsilon', &\qquad t \in [\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}, \sqrt{R^2-\varepsilon'^2}] \\
\Gamma^{(2)}_{\varepsilon,\varepsilon',R}(t) = (-\Gamma)(t), &\qquad \Gamma(t) = t - i\varepsilon',\ t \in [\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}, \sqrt{R^2-\varepsilon'^2}].
\end{aligned}$$



D'une part, comme le chemin $\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}$ est homotope à un chemin constant dans Ω_0, le théorème des résidus fournit

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}} dz\ f(z) \ = \ 2i\pi Res_{-1} f \ = \ -2i\pi e^{\alpha \log_0(-1)} \ = \ -2i\pi e^{i\alpha\pi}.$$

D'autre part, calculons (dans l'ordre)

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\varepsilon'\to 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}} dz\ f(z).$$

Regardons ce qui se passe pour l'intégrand sur les deux segments de droite : pour tout $t > 0$, on a

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} (f(t+i\varepsilon') - f(t-i\varepsilon')) = \frac{e^{\alpha \ln(t)} - e^{\alpha(\ln(t)+2i\pi)}}{t(t+1)} = t^\alpha \frac{1-e^{2i\pi\alpha}}{t(t+1)}.$$

Dès lors, pour R, ε fixés, le théorème de Lebesgue donne

$$\lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}} f(z)dz = (1 - e^{2i\pi\alpha}) \int_{\varepsilon}^{R} dt\ \frac{t^\alpha}{t(t+1)}\ +\ \int_{\gamma^{(3)}_{\varepsilon,0}} dz\ f(z)\ +\ \int_{\gamma^{(1)}_{0,R}} dz\ f(z).$$

On a

$$|\int_{\gamma^{(3)}_{\varepsilon,0}} dz\ f(z)| \leq 2\pi\varepsilon \frac{\varepsilon^\alpha}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = 2\pi \frac{\varepsilon^\alpha}{1-\varepsilon}\ \to 0 \text{ si } \varepsilon \to 0.$$

De même, on a

$$|\int_{\gamma^{(1)}_{0,R}} dz\ f(z)| \leq 2\pi \frac{R^\alpha}{R-1}\ \to 0 \text{ si } R \to +\infty.$$

Dès lors

$$-2i\pi e^{i\alpha\pi} = \lim_{R\to+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\varepsilon'\to 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}} dz\ f(z) = (1 - e^{2i\pi\alpha}) \int_0^{+\infty} dt\ \frac{t^\alpha}{t(t+1)}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$