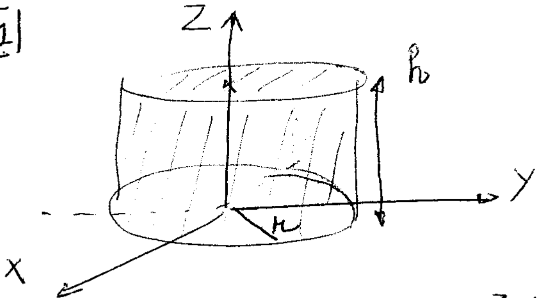
TD du 05.12.08 — Analyse II, 2.Bing.civ.

Résumé de Correction (provisoire) (FB, 16.12.08)

EXERCICE 1



S est formée de 2 parties (2 portions régulières)

S_1 ("latéral")

S_2 ("couvercle")

- $I = \iint_{S^+} \text{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma$; $II = \int_{\mathcal{C}^+} \vec{f} \cdot \vec{t} \, ds$; thèse : $I = II$
- Param. de S_1 : $\vec{\varphi}_1(\theta, z) = [r\cos\theta, r\sin\theta, z]$, $z \in [0,h]$ & $\theta \in [0, 2\pi]$

  S_2 : $\vec{\varphi}_2(\theta, t) = [t\cos\theta, t\sin\theta, h]$, $t \in [0,r]$ & $\theta \in [0, 2\pi]$

Orientation "normale vers l'extérieur" :

$$D_\theta \vec{\varphi}_1 \wedge D_z \vec{\varphi}_1 = [r\cos\theta, r\sin\theta, 0] \quad \text{pour } S_1$$

$$D_t \vec{\varphi}_2 \wedge D_\theta \vec{\varphi}_2 = [0, 0, t] \quad \text{pour } S_2$$

$\mathcal{C}^+$ a pour paramétrage $\vec{\gamma}(\theta) = [r\cos\theta, r\sin\theta, 0]$, $\theta \in [0, 2\pi]$
& $D\vec{\gamma}(\theta) = [-r\sin\theta, r\cos\theta, 0]$

$\text{rot} \vec{f} = [xz, -yz, -x^2]$

- $I = \iint_{S^+} \text{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{S_1^+} \text{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma + \iint_{S_2^+} \text{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(r^2 z \cos^2\theta - r^2 z \sin^2\theta \right) d\theta \, dz + \int_0^{2\pi} \int_0^r \left(-t^3 \cos^2\theta \right) d\theta \, dt$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^h z \cos(2\theta) \, d\theta \, dz - \int_0^r t^3 dt \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

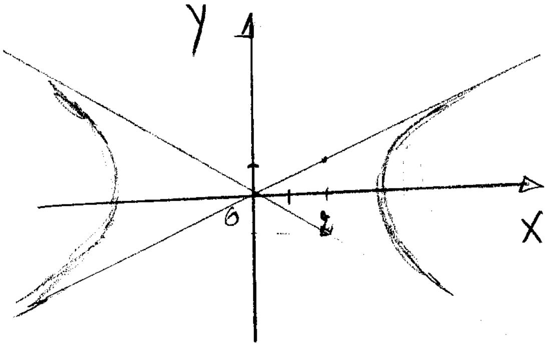
$$= -\int_0^r t^3 dt \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = -\frac{\pi r^4}{4}$$

$$II = -\int_0^{2\pi} r^4 \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta = -\frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta) \, d\theta = -\frac{r^4 \pi}{4}$$

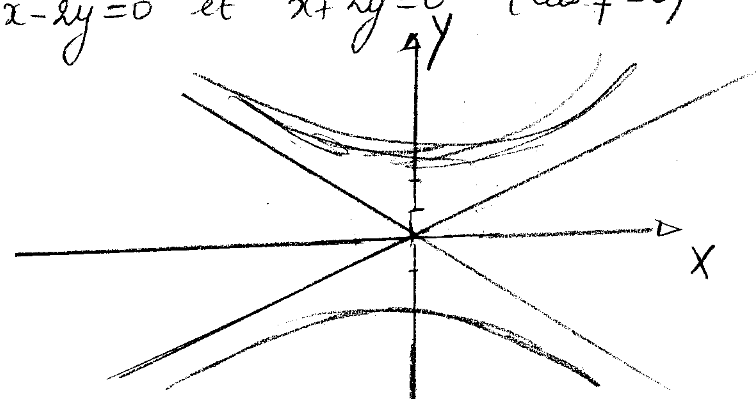
D'où $I = II$.

EXERCICE 2

a) Les courbes de niveau de f sont des hyperboles ou l'union des deux dr. d'éq. cart. $x-2y=0$ et $x+2y=0$ (cas $f=0$)



$f(x,y)=r$ avec $r>0$



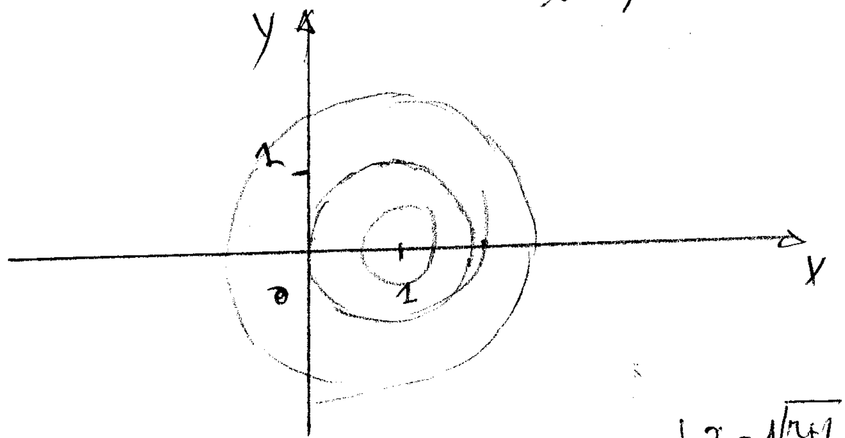
$f(x,y)=r$ avec $r<0$

Les courbes de niveau de g sont des cercles, un pt, ou le vide.

$$g(x,y) = x^2+y^2-2x = (x-1)^2+y^2-1 = r$$

$$\iff (x-1)^2+y^2 = r+1$$

- cercle de centre $(1,0)$ et de rayon $\sqrt{r+1}$ lorsque $r+1>0$
- Pt $(1,0)$ lorsque $r=-1$
- $\emptyset$ lorsque $r+1<0$



b) Paramétrage de $g(x,y)=r$ $(r+1>0)$: $\begin{cases} x = \sqrt{r+1}\cos t + 1 \\ y = \sqrt{r+1}\sin t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$

Paramétrage de $f(x,y)=r$ avec $r>0$ (2 branches)

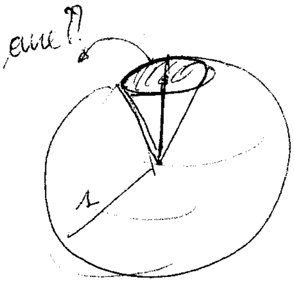
$\begin{cases} x = \sqrt{4y^2+r} \\ y = y \end{cases}$, $y\in\mathbb{R}$ & $\begin{cases} x = -\sqrt{4y^2+r} \\ y = y \end{cases}$, $y\in\mathbb{R}$

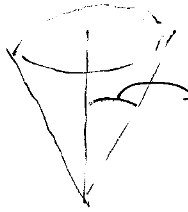
ou $\begin{cases} x = \dfrac{\cosh t}{\sqrt{r}} \\ y = \dfrac{sh\, t}{2\sqrt{r}} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = -\dfrac{\cosh t}{\sqrt{r}} \\ y = \dfrac{sh\, t}{\sqrt{r}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

Autres : analogue $(r<0)$ et pour $r=0$, comme il s'agit de 2 droites, on utilise un param. standard (linéaire)

$\boxed{\text{EXERCICE 3}}$ Il s'agit de calculer $\iint_S d\sigma$

càd l'aire de S (où S est une partie de la sphère bien déf. par le contexte)





angle d'ouverture du cône θ (mes. de l'angle entre l'axe et une génératrice)

(NB parfois on prend deux fois cette mesure comme déf. de départ)

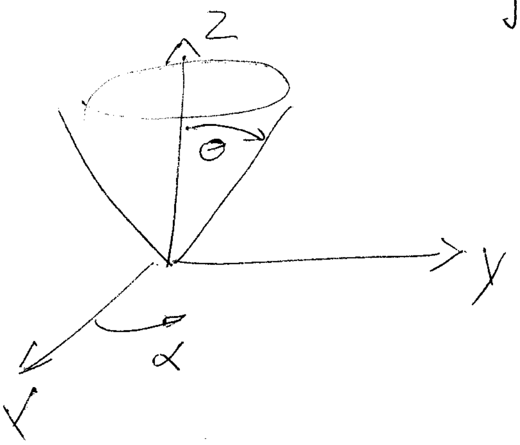
On a le param. suivant pour la sphère de rayon 1 :

$$\vec{\varphi}(\alpha, t) = [\cos\alpha \sin t, \sin\alpha \sin t, \cos t], \quad \alpha \in [0, 2\pi], \ t \in [0, \pi]$$

La long. de ~~la~~ normalle associée : $\| D_\alpha \vec{\varphi} \wedge D_t \vec{\varphi} \| = \sin t$

Ainsi l'Aire cherchée $= \displaystyle\int_0^\theta \int_0^{2\pi} \sin t \; dt\, d\alpha$

$$= 2\pi \int_0^\theta \sin t \; dt = \boxed{2\pi(1-\cos\theta)}$$



EXERCICE 4

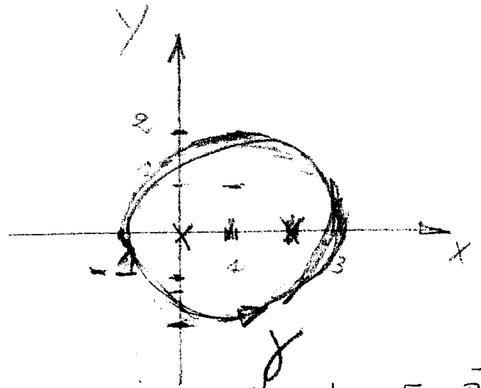
a) $f(z) = \frac{7z-6}{z^2-2z} = \frac{7z-6}{z(z-2)}$

f est hol. ds $\mathbb{C}\setminus\{0,2\}$

0 & 2 sont des pôles simple

On a (thm des résidus)

$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi\left(\mathrm{Res}_0 f + \mathrm{Res}_2 f\right) = 14i\pi$



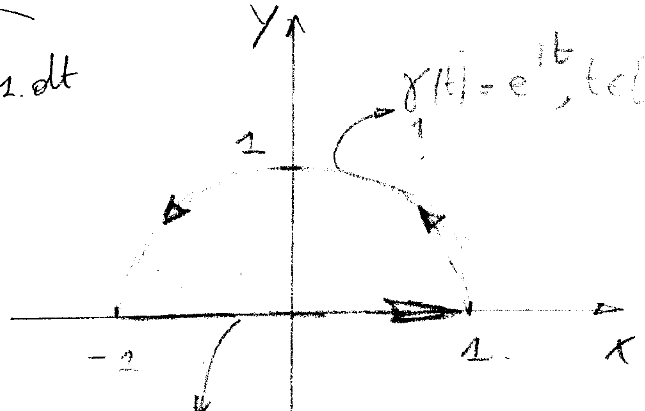
$\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$= [1 + 2\cos t, 2\sin t]$

b) $\int_\gamma \mathcal{R}(2z)\,dz = \int_0^\pi 2\cos t \cdot i e^{it}\,dt + \overbrace{\int_{-1}^{1} 2t \cdot 1\,dt}^{0}$

$= i\int_0^\pi (e^{it} + e^{-it})e^{it}\,dt$

$= i\int_0^\pi dt = i\pi$



$\gamma_1(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$

$\gamma_2(t) = t$, $t \in [-1, 1]$

$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$

Exercice 5

Cas de $f_1(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-i}}}{z^2+1}$

f_1 est hol. ds $\mathbb{C}\setminus\{-i, i\}$; $\begin{cases} -i \text{ est un pôle simple. pas de zéros} \\ i \text{ est une sing. essentielle.} \end{cases}$

$\mathrm{Res}_{-i} f_1 = \mathrm{Res}_{-i} \frac{e^{\frac{1}{z-i}}/(z-i)}{z+i} = \frac{e^{\frac{1}{-2i}}/(2i)}{1} = \frac{e^{i/2}}{-2i} = \frac{i e^{i/2}}{2}$

$\mathrm{Res}_i f_1 = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{e^{1/(z-i)}}{(z-i)(z+i)}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{1}{\delta e^{it}}}}{\delta e^{it}(2i + \delta e^{it})} i\delta e^{it}\,dt$

où $\gamma(t) = i + \delta e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$0 < \delta < 2$

[redacted]

$$\operatorname{Res}_i f_1 = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{e^{-it}}{\delta}}}{(2i+\delta e^{it})}\, i\, dt$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{e^{-it}}{\delta}}}{\left(\frac{2i}{\delta} e^{-it}+1\right)} \frac{i}{\delta} e^{-it}\, dt$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0} \frac{e^{z}}{(2iz+1)}\, dz \qquad \left(\gamma_0(t) = \frac{1}{\delta} e^{it},\ t\in[0,2\pi]\right)$$

$$= \operatorname{Res}_{-\frac{1}{2i}} \frac{e^{z}}{2iz+1} = \frac{e^{-\frac{1}{2i}}}{2i}$$

$$= \frac{-ie^{i/2}}{2}$$

<u>Cas de</u> $f_2(z) = \sin z \cdot e^{1/z}$

f_2 est hol. ds $\mathbb{C}_0$; 0 est sing. essentielle isolée ; les zéros de f_2 sont $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}_0$. Ce sont des zéros simples

$$\operatorname{Res}_0 f_2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m)!\,(2m-1)!}$$

<u>Cas de</u> f_3 : voir examen d'août 08

EXERCICE 6

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,dx = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{4+e^{ix}+e^{-ix}}\,dx = \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{dz}{1+4z+z^2}$$

$(\gamma(t) = e^{it}, t\in[0,2\pi])$

$$= 4\pi \operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{3}$$

$(z_0 = -2+\sqrt{3})$

L'autre intégrale fait partie de la liste n°9 (ex n°6) de 06/07.