1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Corrigé de l'examen de math du 5 janvier 2010

Version 21 janvier 2010 (V1 12/01/10)

Mathématiques générales A
Examen du mardi 05/01/10, 08h30-11h30, Amphis Europe - 604

Question de théorie

1. **Enoncer le théorème des accroissements finis et en donner une interprétation graphique.**
2. **Quelle est la forme explicite de la dérivée de la fonction** arcsin **? Démontrer ce résultat.**

   Solution. Voir cours

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[0, 2\pi]$, résoudre l'équation suivante**

$$2\cos^2 x = \sin^2(2x).$$

Solution. Comme $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x,\ x \in \mathbb{R}$, l'équation est équivalente à

$$1+\cos(2x) = 1-\cos^2(2x) \Leftrightarrow \cos^2(2x)+\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(2x) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$.

(b) Si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\ln\left(e^2 \sin(\frac{5\pi}{6})\right) + \ln\left(\sqrt{(-2)^2}\right).$$

Solution. Comme $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ et $\sqrt{(-2)^2} = 2$, en appliquant la propriété relative à la somme de logarithmes de réels positifs et en utilisant $\ln e = 1$, on a

$$\ln\left(e^2 \sin(\frac{5\pi}{6})\right) + \ln\left(\sqrt{(-2)^2}\right) = \ln\left(e^2 \ .\ \frac{1}{2}\ .\ 2\right) = 2\ln e = 2.$$

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x - x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|1-x|}.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{tg}x - x}{x^3}$ est définie sur $A = \mathbb{R}_0 \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre A, le calcul de la limite en 0 peut être envisagé.
Pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées.
En effet, si $V =]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus\{0\}$ $(\varepsilon > 0)$, on a
1) $f : x \mapsto \mathrm{tg}x - x$ et $g : x \mapsto x^3$ sont dérivables dans V
2) $Dg(x) = 3x^2 \neq 0$ dans V
3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$
4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2\cos^2 x} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$
puisque $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (encore par application du théorème de l'Hospital).
Dès lors, la limite cherchée vaut $\dfrac{1}{3}$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|1-x|}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|1-x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{1-x} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{\frac{1}{x}-1} = 1.$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_0^{\pi/6} \sin^2(2x)\ dx, \qquad \int_0^{+\infty} xe^{-3x}\ dx.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \sin^2(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[0, \frac{\pi}{6}]$. Cela étant, comme $\sin^2(2x) = \dfrac{1-\cos(4x)}{2}$, on a

$$\int_0^{\pi/6} \sin^2(2x)\ dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(4x)}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{8}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

La fonction $x \mapsto xe^{-3x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$, cette fonction est donc intégrable sur $[0, t]$ et, par une intégration par parties, on a

$$\int_0^t xe^{-3x}\ dx = -\frac{1}{3}\int_0^t xDe^{-3x}\ dx = -\frac{1}{3}te^{-3t} + \frac{1}{3}\int_0^t e^{-3x}\ dx = -\frac{1}{3}te^{-3t} - \frac{1}{9}(e^{-3t} - 1).$$

Dès lors,

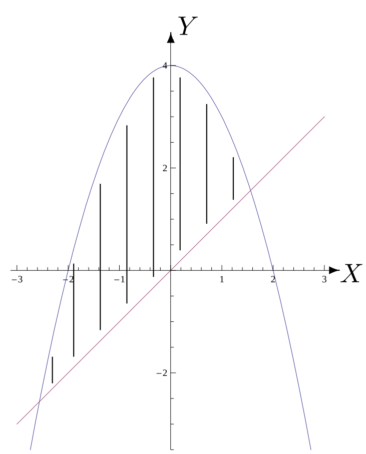
$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t xe^{-3x}\ dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}te^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t}\right) = \frac{1}{9}.$$

Comme la fonction $x \mapsto xe^{-3x}$ est à valeurs positives pour $x \geq 0$, la limite précédente donne son intégrabilité et la valeur de son intégrale sur $[0, +\infty[$.

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. Représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \leq y \leq 4 - x^2\right\}$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble. (Le bord est constitué d'un segment de la droite d'équation cartésienne $x = y$ et de la parabole d'équation cartésienne $y = 4x^2$.)



5. **(a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ vérifie l'équation différentielle**

$$Df = f\left(1-f\right).$$

Solution. D'une part, la fonction donnée est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$D\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \quad \text{pour tout} \quad x.$$

D'autre part, pour tout x on a

$$f(x)\big(1-f(x)\big) = \frac{1}{1+e^{-x}}\left(1-\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = \frac{1+e^{-x}-1}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

Dès lors, la fonction donnée vérifie bien l'équation différentielle.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = x$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$ et son seul zéro est -1. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$(c_1x + c_2)e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est le produit d'un polynôme de degré 1 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 0$, non solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = Ax + B,\ x \in \mathbb{R}$ où A et B sont des constantes à déterminer. Comme $Df_P(x) = A$ et $D^2f_P(x) = 0$, on a $2A + Ax + B = x$ et, par identification des coefficients des polynômes, on obtient $A = 1$ et $B = -2$.
Ainsi, $f_P(x) = x - 2,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$(c_1x + c_2)e^{-x} + x - 2,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Un récipient de laboratoire rempli au tiers d'eau pèse 70gr. Rempli aux trois quarts d'eau, il pèse 130gr. Que pèse (en grammes) le récipient vide ? Quelle est la capacité (en centilitres) de ce récipient ?**

Solution. Notons R le poids en gr du récipient vide et E le poids en gr de l'eau quand le récipient est rempli. On a alors le système

$$\left\{\begin{array}{l} R + \frac{1}{3}E = 70 \\ R + \frac{3}{4}E = 130 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} R + \frac{1}{3}E = 70 \\ (\frac{3}{4} - \frac{1}{3})E = 130 - 70 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} E = \frac{12}{5}\ .\ 60 = 144 \\ R = 70 - 48 = 22 \end{array}\right. .$$

Comme 1 litre d'eau pèse 1 kg, 1 ml pèse 1 gr et la capacité du récipient est de 144 ml = 14,4 cl.
Ainsi, le récipient vide pèse 22 gr et sa capacité est de 14,4 cl.

Exercices BIS

1. **Résoudre l'inéquation suivante (x est l'inconnue réelle)**

$$x\ |1-x|\ \leq\ x^2$$

Solution. Tout réel négatif x est solution puisque le premier membre de l'inéquation est négatif tandis que le second est positif.
Considérons $x > 0$. L'inéquation est alors équivalente à $|1-x| \leq x$.
Si $x \in]0,1]$, $|1-x| = 1-x$ et l'inéquation s'écrit $1-x \leq x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.
Si $x \in [1,+\infty[$, $|1-x| = x-1$ et l'inéquation s'écrit $x-1 \leq x$, inégalité vraie pour tout réel.
Dès lors, l'ensemble des solutions est $S =]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$.

2. **Si x désigne un réel de l'intervalle $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ et si $\operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que valent les nombres**

$$\operatorname{tg} x,\ \sin x,\ \cos x?$$

Solution. Pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $\operatorname{tg}(x) = 1/\operatorname{cotg}(x)$. Dès lors, $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
Comme $\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, on obtient d'abord $\cos^2(x) = \frac{1}{3}$. Ensuite, comme $\cos(x) < 0$ puisque $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, on obtient $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Enfin, comme $\sin(x) = \operatorname{tg}(x)\cos(x)$, on a $\sin(x) = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.