1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Corrigé de l'examen de math du 25 mai 2010
Mathématiques générales A

Version 20 mai 2010

Mathématiques générales A, 2009-2010 Examen du mardi 25/05/10

Questions de théorie

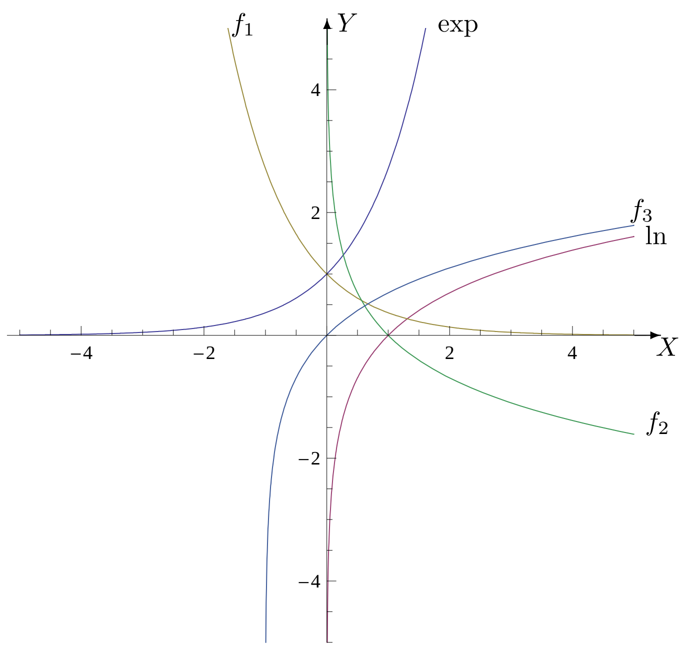
1. **(a) Quels sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions exponentielle et logarithme népérien ?**
(b) Quelles sont les limites des valeurs de ces fonctions aux extrémités de leurs domaines de définitions ?
(c) Quelles sont les propriétés fondamentales de ces fonctions vis-à-vis de la somme et du produit ?
(d) Dans un même repère orthonormé, représenter ces fonctions. Expliquer comment vous pouvez trouver le graphique de l'une en fonction de celui de l'autre.
(e) On donne les fonctions f_1, f_2, f_3 par

$$f_1(x) = \exp(-x), \qquad f_2(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right), \qquad f_3(x) = \ln(x+1).$$

- Quels sont les domaines de définition de ces fonctions ?
- Dans le même repère orthonormé qu'au point (d), en utilisant des couleurs différentes, esquisser le graphique de ces fonctions à partir des graphiques des fonctions exponentielle et logarithme.

Solution. (a), (b), (c) : voir cours.
(d) On passe d'un graphique à l'autre en effectuant une symétrie orthogonale dont l'axe est la droite d'équation $y = x$.

(e)On a $\mathrm{dom}(f_1) = \mathbb{R}$, $\mathrm{dom}(f_2) =]0, +\infty[$ et $\mathrm{dom}(f_3) =]-1, +\infty[$.



2. ***Si deux fonctions sont dérivables dans le même intervalle, alors leur produit est dérivable dans cet intervalle.* Démontrer cette propriété et donner l'expression de la dérivée du produit qui utilise la dérivée des facteurs.**

Solution. Voir cours.

$\boxed{\textit{Exercices}}$

1. **Résoudre l'équation suivante (on suppose que $x \in [\pi, 3\pi]$)**

$$\sin x \ \cos(2x) = \sin(2x) \ \cos x \ -\frac{1}{2}.$$

Solution. L'équation est équivalente à

$$\sin x \ \cos(2x) - \sin(2x) \ \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x - 2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}.$$

L'ensemble de ses solutions est donné par

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont $\dfrac{13\pi}{6}$ et $\dfrac{17\pi}{6}$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(2x)}{x}, \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1}.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non minoré. Le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.
Comme pour tout réel strictement négatif x on a

$$-1 \leq \sin(2x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{x} \geq \frac{\sin(2x)}{x} \geq \frac{1}{x},$$

par application du théorème de l'étau, la limite cherchée vaut 0.

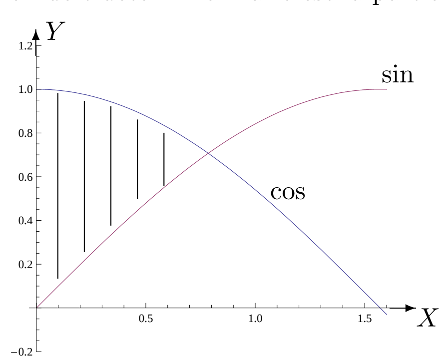
La fonction $x \mapsto \dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 1 rencontre $A\cap\ ]-\infty, 1[$, le calcul de la limite en 1^- peut être envisagé.
Cela étant, on a

$$\lim_{x\to1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{-(x^2-1)}{x-1} = -\lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = -2$$

après simplification de la fraction par $x - 1$.

3. **Déterminer l'aire de la surface bornée fermée déterminée par le graphique des fonctions sinus et cosinus de domaine de définition restreint à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Dans un repère orthonormé, représenter cette surface en la hachurant.**

Solution. La surface dont on doit déterminer l'aire est la partie du plan hachurée ci-dessous.



La fonction $x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[0, \frac{\pi}{4}]$ et on a

$$\int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x))\ dx = [\sin(x) + \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.$$

4. **(a) Montrer que la fonction $x \mapsto xe^{-x} + \cos x$ vérifie l'équation différentielle**

$$D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = -2\sin x.$$

Solution. La fonction donnée est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$D(xe^{-x} + \cos x) = (1-x)e^{-x} - \sin(x) \quad \text{et} \quad D^2(xe^{-x} + \cos x) = (x-2)e^{-x} - \cos(x).$$

Dès lors,

$$D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = (x-2)e^{-x} - \cos(x) + 2(1-x)e^{-x} - 2\sin(x) + xe^{-x} + \cos x = -2\sin x$$

et la fonction donnée vérifie bien l'équation différentielle.

(b) **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2 f(x) + 2Df(x) = x$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) + 2Df(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 2z = z(z+2)$ et ses zéros sont -2 et 0. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 + c_2 e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est le produit d'un polynôme de degré 1 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 0$, solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = (Ax+B)x = Ax^2 + Bx,\ x \in \mathbb{R}$ où A et B sont des constantes à déterminer.
Comme $Df_P(x) = 2Ax + B$ et $D^2 f_P(x) = 2A$, on a $2A + 4Ax + 2B = x$ et, par identification des coefficients des polynômes, on obtient $A = \frac{1}{4}$ et $B = -\frac{1}{4}$.
Ainsi, $f_P(x) = \frac{x^2 - x}{4},\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{x^2 - x}{4},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

5. **Une enveloppe contenant 4 feuilles A4 pèse 70 gr. Avec 9 feuilles A4, elle pèse 130 gr. Que pèse l'enveloppe ? Que pèse une feuille A4 ?**

Solution. Notons E le poids en gr de l'enveloppe vide et F le poids en gr d'une feuille A4. On a alors le système

$$\left\{ \begin{array}{l} E + 4F = 70 \\ E + 9F = 130 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5F = 130 - 70 = 60 \\ E = 70 - 4F \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F = 12 \\ E = 70 - 48 = 22. \end{array} \right.$$

Ainsi, l'enveloppe vide pèse 22 gr et une feuille A4 pèse 12 gr.