1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Corrigé de l'interrogation de math du 26 octobre 2009

Version 13 novembre 2009 (V1 11/11/09)

Questions ouvertes

1. **Déterminer les solutions réelles (x) de l'inéquation suivante**

$$|x-1| \geq 2$$

Solution. L'inéquation est équivalente à

$$x-1 \leq -2 \;\text{ ou }\; x-1 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -1 \;\text{ ou } x \geq 3.$$

Dès lors, l'ensemble des solutions est $S = \,]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$.

2. **a) (i) Quel est le domaine de définition de la fonction sinus ?**
(ii) Comment définit-on géométriquement le sinus du réel 6 ? Expliquer clairement votre réponse et l'illustrer par une représentation géométrique.

b) Si α désigne un réel de l'intervalle $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ et si $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que valent les nombres

$$\mathrm{tg}\alpha,\; \sin\alpha,\; \cos\alpha?$$

c) Sachant que l'inconnue réelle x est dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, résoudre l'équation

$$\sin x = \sin(2x)$$

Solution. a) Voir cours.

b) Pour tout réel α différent de $k\frac{\pi}{2},\; k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{tg}(\alpha) = 1/\mathrm{cotg}(\alpha)$. Dès lors, $tg(\alpha) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ si on multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{2}$.
Vu que $\mathrm{tg}^2(\alpha) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$, on a $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{3}$ et comme $\cos(\alpha) < 0$ puisque $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, on obtient $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Enfin, comme $\sin(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha)\;.\;\cos(\alpha)$, on a $\sin(\alpha) = \sqrt{2}\;.\;(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

c) L'équation est équivalente à

$$(x = 2x + 2k\pi \;\text{ ou }\; x = \pi - 2x + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (x = 2k\pi \;\text{ ou }\; x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\; k \in \mathbb{Z}).$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $0,\; \dfrac{\pi}{3},\; \pi,\; \dfrac{5\pi}{3}$ et 2π.

3. **On se place dans un repère orthonormé. Quel est le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne ? Et quelle est leur excentricité ?**

$$4x^2 = y^2 - 1, \qquad 9x^2 + 4y^2 = 36$$

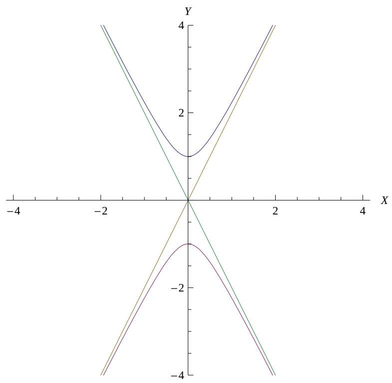
Solution. L'équation $4x^2 = y^2 - 1$ est celle d'une hyperbole dont l'excentricité vaut

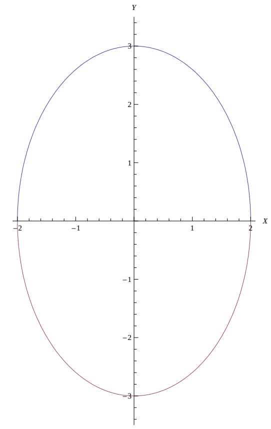
$$e = \frac{\sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2}}{1} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

L'équation $9x^2 + 4y^2 = 36$ est celle d'une ellipse dont dont l'excentricité vaut

$$e = \frac{\sqrt{3^2 - 2^2}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Les graphiques de ces coniques sont les suivants :



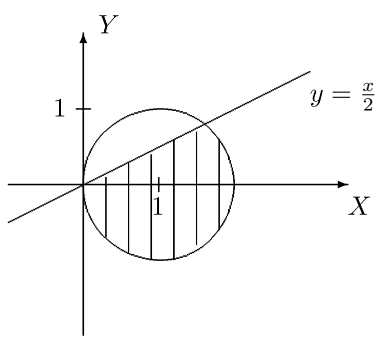


4. **On se place dans un repère orthonormé et on donne l'ensemble décrit analytiquement par**

$$\{(x,y)\ :\ x,y\in\mathbb{R},\ x\geq 2y \text{ et } x^2-2x+y^2\leq 0\}$$

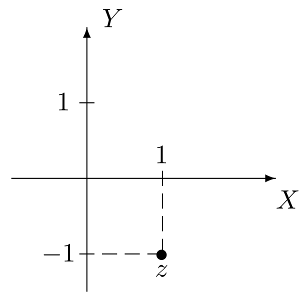
Représenter cet ensemble en le hachurant.

Solution. La représentation graphique de l'ensemble est la suivante, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



5. **On donne le complexe $z = 1 - i$.**
a) En déterminer le module et une forme trigonométrique. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (X= « axe réel » et Y=« axe imaginaire »)
b) Que vaut la partie réelle du complexe z^2 ?
c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est-elle toujours égale au carré de la partie imaginaire du complexe ? Pourquoi ?

Solution. a) Puisque $\Re z = 1$ et $\Im z = -1$, le module de z vaut $|z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.
La forme trigonométrique d'un complexe est une expression du type $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $r = |z|$. Dès lors, vu l'égalité des complexes, θ est tel que $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Si $\theta \in [0, 2\pi]$ alors $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$ et la forme trigonométrique de z est $\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)\right)$.
La représentation de z dans le plan muni d'un repère orthonormé est la suivante



b) Comme $z^2 = (1-i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i$, la partie réelle de z^2 est nulle.

c) La partie imaginaire du carré d'un complexe n'est pas toujours égale au carré de la partie imaginaire du complexe : il suffit de prendre le complexe z donné dans l'énoncé pour le constater. En effet, on a $\Im(z^2) = -2$ et $(\Im z)^2 = (-1)^2 = 1$.
Si $z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$, on a $z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ et $(\Im z)^2 = \Im(z^2) \Leftrightarrow b^2 = 2ab \Leftrightarrow b = 0$ ou $b = 2a$.
Ainsi, l'égalité est vraie si et seulement si le complexe est réel ou si sa partie imaginaire est double de sa partie réelle.

Problème élémentaire

Un tonneau rempli à moitié d'eau pèse 56 kg. Rempli aux deux tiers d'eau, il pèse 65 kg. Quelle est la capacité en hectolitres de ce tonneau et que pèse le tonneau vide ?

Solution. Notons T le poids en kg du tonneau vide et E le poids en kg de l'eau quand le tonneau est rempli. On a alors le système

$$\left\{\begin{array}{l} T + \frac{1}{2}E = 56 \\ T + \frac{2}{3}E = 65 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} T + \frac{1}{2}E = 56 \\ (\frac{2}{3} - \frac{1}{2})E = 65 - 56 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} E = 6\ .\ 9 = 54 \\ T = 56 - 27 = 29 \end{array}\right. .$$

Comme 1 litre d'eau pèse 1 kg et que 1 hl = 100 l, la capacité du tonneau est de 54 l = 0,54 hl. Ainsi, le tonneau vide pèse 29 kg et sa capacité est de 0,54 hl.