1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Mathématiques générales 2009-2010 : Test 4 (biologie et physique)

1. **Calculer la limite suivante (si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)**

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \mathrm{cotg}(x)}{\cos(2x)}$$

Solution. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1 - \mathrm{cotg}(x)}{\cos(2x)}$. On a

$$\mathrm{dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi \quad \text{et} \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Puisque tout intervalle ouvert comprenant $\frac{\pi}{4}$ rencontre $\mathrm{dom}(f)$, le calcul de la limite a un sens. Comme $\mathrm{cotg}(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $\cos(\frac{2\pi}{4}) = 0$, on lève l'indétermination $\frac{0}{0}$ par application du théorème de l'Hospital.

En effet, au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ les hypothèses du théorème sont satisfaites puisque
1) les fonctions $x \mapsto 1 - \mathrm{cotg}(x)$ et $x \mapsto \cos(2x)$ sont dérivables

2) la dérivée $D\cos(2x) = -2\sin(2x) \neq 0$

3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (1 - \mathrm{cotg}(x)) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\cos(2x)) = 0$

4) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{D(1 - \mathrm{cotg}(x))}{D\cos(2x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{-2\sin(2x)} = -\frac{1}{2} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \sin(2x)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} = -1.$

Dès lors, par application du théorème, on a $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \mathrm{cotg}(x)}{\cos(2x)} = -1.$

2. **Primitiver la fonction f donnée explicitement par**

$$f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2(x)}}.$$

Que vaut la primitive de f qui prend la valeur 2 en 1 ?

Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$ est continue sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0,\ x > 0,\ 1 - \ln^2 x > 0\} = \left]\frac{1}{e}, e\right[$$

puisque $-1 < \ln x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < e$. Cette fonction est donc primitivable sur l'ouvert $]\frac{1}{e}, e[$.

Primitivant par substitution, on a

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}\, dx = \left(\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right)_{t=\ln x} \simeq \arcsin(\ln x),\ x \in \left]\frac{1}{e}, e\right[.$$

Comme $\arcsin(\ln 1) = 0$, la primitive qui prend la valeur 2 en 1 est la fonction

$$x \mapsto \arcsin(\ln x) + 2.$$

Mathématiques générales 2009-2010 : Test 4
(chimie, géographie, géologie et informatique)

---

1. **Calculer la limite suivante (si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)**

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\text{cotg } x)}$$

Solution. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\text{cotg } x)}$. On a

$$\begin{aligned}\text{dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi\ (\ k \in \mathbb{Z}),\ \cos x > 0,\ \text{cotg } x > 0 \text{ et } \text{cotg } x \neq 1\} \\ &= \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.\end{aligned}$$

Puisque tout intervalle ouvert comprenant $\frac{\pi}{2}$ rencontre $\text{dom}(f) \cap\ ]-\infty, \frac{\pi}{2}[$, le calcul de la limite a un sens. Comme $\cos(\frac{\pi}{2}) = \text{cotg}(\frac{\pi}{2}) = 0$, on a

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \ln(\text{cotg } x) = -\infty$$

et on lève l'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$ par application du théorème de l'Hospital.

En effet, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ les hypothèses du théorème sont satisfaites puisque
1) les fonctions $x \mapsto \ln(\cos x)$ et $x \mapsto \ln(\text{cotg } x)$ sont dérivables
2) la dérivée $D \ln(\text{cotg } x) = \frac{-1}{\text{cotg}(x) \sin^2 x} = \frac{-1}{\sin x \cos x} \neq 0$
3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \ln(\text{cotg } x) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{D\ln(\cos x)}{D\ln(\text{cotg } x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\frac{-1}{\sin x\cos x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sin^2 x = 1.$

Dès lors, par application du théorème, on a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\text{cotg } x)} = 1.$

2. **Primitiver la fonction f donnée explicitement par**

$$f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{1-\text{tg}^2(x)}}.$$

Que vaut la primitive de f qui prend la valeur 1 en 0 ?

Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{1-\text{tg}^2(x)}}$ est continue sur

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}),\ 1 - \text{tg}^2 x > 0\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right[$$

Cette fonction est donc primitivable sur n'importe lequel de ces intervalles ouverts.

Primitivant par substitution, on a

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{1-\text{tg}^2(x)}}\, dx = \left(\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right)_{t=\text{tg } x} \simeq \arcsin(\text{tg } x),\ x \in A.$$

Comme $\arcsin(\text{tg } 0) = 0$, la primitive qui prend la valeur 1 en 0 est la fonction

$$x \mapsto \arcsin(\text{tg } x) + 1.$$