1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Mathématiques générales 2009-2010 : Test 5 (chimie, géologie et physique)

1. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x,y) : x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right], y \in \mathbb{R} \ \ \textbf{et} \ \ \cos(x) \le y \le \sin(2x)\}\right\}.$$

Donner aussi une représentation de cet ensemble.

Solution. Pour déterminer les bornes des intégrales, résolvons $\cos(x) = \sin(2x)$. Cette équation est équivalente à

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \ \text{ ou } \ x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3} \ \text{ ou } \ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

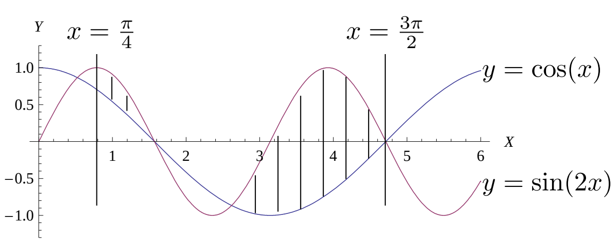
Les solutions dans $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ sont $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$ et $\cos(x) \le \sin(2x)$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ou pour $x \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Comme la fonction $x \mapsto \sin(2x) - \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur les fermés bornés $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$; dès lors, elle est intégrable sur ces ensembles.

Ainsi, l'aire demandée vaut

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2x) - \cos(x))\, dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} (\sin(2x) - \cos(x))\, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) - \sin(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) - \sin(x)\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\cos 3\pi - \sin\frac{3\pi}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{3} - \sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



2. **Calculer l'intégrale suivante (si c'est possible)**

$$\int_0^1 x \ \ln(x) \ dx.$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto x \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc sur $]0, 1]$, ensemble borné non fermé. Etudions son intégrabilité en 0. Si la limite $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ existe et est finie alors f admet un prolongement continu en 0 et est intégrable sur $]0, 1]$. On peut aussi utiliser le critère en θ et pour cela calculer

$$\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x}|x \ln(x)|) = -\lim_{x\to 0^+} (x^{\frac{3}{2}} \ln(x)) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{-3}{2}}}.$$

Dans les deux cas, pour lever l'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$ on applique le théorème de l'Hospital après en avoir vérifié les hypothèses.
Considérons les fonctions $g : x \mapsto \ln(x)$ et $h : x \mapsto x^{\frac{-3}{2}}$. On a
1) g et h fonctions dérivables dans $]0, +\infty[$
2) $Dh(x) = -\frac{3}{2}x^{\frac{-5}{2}} \neq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$
3) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = \infty$
4) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{Dg(x)}{Dh(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-\frac{3}{2}x^{\frac{-5}{2}}} = -\frac{2}{3} \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{2}} = 0.$

Dès lors, $\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x}|x \ln(x)|) = -\lim_{x\to 0^+} (x^{\frac{3}{2}} \ln(x)) = 0$, limite qui existe et est finie avec $\theta = \frac{1}{2} < 1$. Par application du critère en θ, la fonction f est intégrable en 0 donc sur $]0, 1]$.

Par une intégration par parties, on a

$$\int_0^1 x \ln(x) \ dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2} \ dx = \left[-\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}$$

puisque $\ln 1 = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x)\right) = 0.$

Mathématiques générales 2009-2010 : Test 5
(biologie, géographe et informatique)

---

1. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x, y) : x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{9\pi}{4}\right], y \in \mathbb{R} \ \ \textbf{et} \ \ -\sin(x) \leq y \leq \cos(2x)\right\}.$$

Donner aussi une représentation de cet ensemble.

*Solution.*Pour déterminer les bornes des intégrales, résolvons $-\sin(x) = \cos(2x)$. Cette équation est équivalente à

$$\sin(-x) = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + x = 2x + 2k\pi \ \ \text{ou} \ \ \frac{\pi}{2} + x = -2x + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \ \text{ou} \ \ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

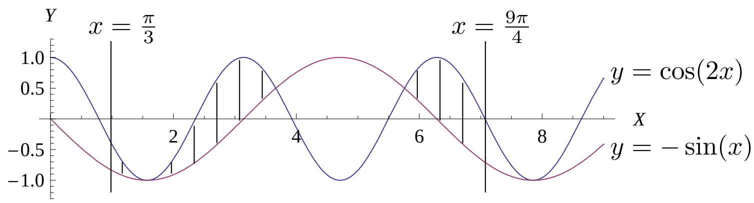
Les solutions dans $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{9\pi}{4}\right]$ sont $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ et $-\sin(x) \leq \cos(2x)$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$ ou pour $x \in \left[\frac{11\pi}{6}, \frac{9\pi}{4}\right]$.

Comme la fonction $x \mapsto \cos(2x)+\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur les fermés bornés $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$ et $\left[\frac{11\pi}{6}, \frac{9\pi}{4}\right]$; dès lors, elle est intégrable sur ces ensembles.

Ainsi, l'aire demandée vaut

$$A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{6}} (\cos(2x)+\sin(x))\, dx + \int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{9\pi}{4}} (\cos(2x)+\sin(x))\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x) - \cos(x)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{6}} + \left[\frac{1}{2}\sin(2x) - \cos(x)\right]_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{9\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin\frac{7\pi}{3} - \cos\frac{7\pi}{6}\right) - \left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sin\frac{9\pi}{2} - \cos\frac{9\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}\sin\frac{11\pi}{3} - \cos\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1.$$



2. **Calculer l'intégrale suivante (si c'est possible)**

$$\int_0^e \sqrt{x}\ \ln(x)\ dx.$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}\ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc sur $]0, e]$, ensemble borné non fermé. Etudions son intégrabilité en 0. Si la limite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existe et est finie alors f admet un prolongement continu en 0 et est intégrable sur $]0, e]$. On peut aussi utiliser le critère en θ et pour cela calculer

$$\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x}|\sqrt{x}\ln(x)|) = -\lim_{x\to 0^+} (x\ln(x)) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-1}}.$$

Dans les deux cas, pour lever l'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$ on applique le théorème de l'Hospital après en avoir vérifié les hypothèses.
Considérons les fonctions $g : x \mapsto \ln(x)$ et $h : x \mapsto x^{-1}$. On a
1) g et h fonctions dérivables dans $]0, +\infty[$
2) $Dh(x) = -x^{-2} \neq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$
3) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = \infty$
4) $\lim_{x\to 0^+} \frac{Dg(x)}{Dh(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$

Dès lors, $\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x}|\sqrt{x}\ln(x)|) = -\lim_{x\to 0^+} (x\ln(x)) = 0$, limite qui existe et est finie avec $\theta = \frac{1}{2} < 1$. Par application du critère en θ, la fonction f est intégrable en 0 donc sur $]0, e]$.

Par une intégration par parties, on a

$$\int_0^e \sqrt{x}\ln(x)\ dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln(x)\right]_0^e - \frac{2}{3}\int_0^e \sqrt{x}\ dx = \frac{2e\sqrt{e}}{3} - \left[\frac{4}{9}x\sqrt{x}\right]_0^e = \frac{2}{9}e\sqrt{e}$$

puisque $\ln e = 1$ et $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln(x)\right) = 0.$