1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Mathématiques générales 2009-2010 : Test 3 (biologie et géographie)

1. **Décomposer la fraction rationnelle suivante en fractions rationnelles simples à coefficients réels**

$$\frac{x-1}{x^2(x^3-1)}.$$

Solution. La fraction $\frac{x-1}{x^2(x^3-1)} = \frac{x-1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}$ est définie si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Simplifions-la pour obtenir une fraction rationnelle propre et décomposons $\frac{1}{x^2(x^2+x+1)}$ en une somme de fractions rationnelles simples. On a

$$\frac{1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1} = \frac{(Ax+B)(x^2+x+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+x+1)},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

où A, B, C, D sont des réels à déterminer.
Les fractions étant égales, on a

$$1 = (A+C)x^3 + (A+B+D)x^2 + (A+B)x + B,\ \ x \in \mathbb{R}$$

et, en identifiant les polynômes, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} A+C=0 \\ A+B+D=0 \\ A+B=0 \\ B=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \\ D=0 \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\frac{x-1}{x^2(x^3-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2+x+1},\ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

2. **Calculer (si possible) la limite suivante sans appliquer le théorème de l'Hospital**

$$\lim_{x\to 0^-} \ln(\mathrm{tg}^2(x)).$$

La fonction $x \mapsto \ln(\mathrm{tg}^2(x))$ est-elle égale à la fonction $x \mapsto 2\ln(\mathrm{tg}(x))$? Justifier.

Solution. La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{tg}x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$.
Comme tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre $A \cap\,]-\infty, 0[$, la limite a un sens.
Par application du théorème des limites des fonctions composées, on a

$$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{tg}^2(x) = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0^+} \ln(y) = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0^-} \ln(\mathrm{tg}^2(x)) = -\infty.$$

La fonction $x \mapsto 2\ln(\mathrm{tg}(x))$ est définie sur $B = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{tg}x > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$. Les deux fonctions données n'ayant pas le même domaine de définition ne sont donc pas égales.
Cependant sur l'ensemble B, ensemble commun sur lequel elles sont définies, les fonctions sont égales par application de la propriété des logarithmes relative aux puissances.

Mathématiques générales 2009-2010 : Test 3
(chimie, géologie, physique et informatique)

---

1. **Décomposer la fraction rationnelle suivante en fractions rationnelles simples à coefficients réels**

$$\frac{x+1}{x^2(x^3+1)}.$$

Solution. La fraction $\dfrac{x+1}{x^2(x^3+1)} = \dfrac{x+1}{x^2(x+1)(x^2-x+1)}$ est définie si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.
Simplifions-la pour obtenir une fraction rationnelle propre et décomposons $\dfrac{1}{x^2(x^2-x+1)}$ en une somme de fractions rationnelles simples. On a

$$\frac{1}{x^2(x^2-x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} = \frac{(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2-x+1)},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$$

où A, B, C, D sont des réels à déterminer.
Les fractions étant égales, on a

$$1 = (A+C)x^3 + (-A+B+D)x^2 + (A-B)x + B,\ x \in \mathbb{R}$$

et, en identifiant les polynômes, on obtient

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B+D=0 \\ A-B=0 \\ B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-1 \\ D=0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{x+1}{x^2(x^3+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2-x+1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}.$$

2. **Calculer (si possible) la limite suivante sans appliquer le théorème de l'Hospital**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \ln(\mathrm{cotg}^2(x)).$$

La fonction $x \mapsto \ln(\mathrm{cotg}^2(x))$ **est-elle égale à la fonction** $x \mapsto 2\ln(\mathrm{cotg}(x))$ **? Justifier.**

Solution. La fonction est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{cotg}x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$.
Comme tout intervalle ouvert comprenant $\frac{\pi}{2}$ rencontre $A \cap \,]\frac{\pi}{2}, +\infty[$, la limite a un sens.
Par application du théorème des limites des fonctions composées, on a

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \mathrm{cotg}^2(x) = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0^+} \ln(y) = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \ln(\mathrm{cotg}^2(x)) = -\infty.$$

La fonction $x \mapsto 2\ln(\mathrm{cotg}(x))$ est définie sur $B = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{cotg}x > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.
Les deux fonctions données n'ayant pas le même domaine de définition ne sont donc pas égales. Cependant sur l'ensemble B, ensemble commun sur lequel elles sont définies, les fonctions sont égales par application de la propriété des logarithmes relative aux puissances.