Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 1
Répétition 1

Version 9 septembre 2009(V1 : 29/08/09)

Préambule

Bien des problèmes en sciences donnent lieu à des équations ou inéquations qu'on doit pouvoir résoudre.

– Ainsi, par exemple, un mouvement rectiligne uniforme donne lieu à une équation du premier degré décrivant la position du mobile en fonction du temps. Graphiquement, le mouvement se représente donc par une droite. Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, on est en présence d'une équation du second degré pour décrire la position du mobile en fonction du temps et la représentation graphique est une parabole.
– Si l'on souhaite rechercher le point de rencontre de deux mobiles, on détermine les coordonnées du point d'intersection des graphiques représentant leurs positions en fonction du temps ; analytiquement, on résout un système de deux équations.
– En optique, l'agrandissement d'un objet situé à une distance p d'une lentille convexe de distance focale f $(f > p)$ est donné par $A = \dfrac{f}{f - p}$, ce qui nécessite la résolution d'une équation fractionnaire si p est inconnu ou d'une inéquation si l'agrandissement doit être au moins égal à une valeur donnée.
– Pour calculer la norme de la résultante de deux forces de directions perpendiculaires, après application du théorème de Pythagore, on est amené à calculer une racine carrée.
– Le rayon d'une sphère dont on connaît le volume (excès de liquide lorsqu'on plonge une bille dans un récipient rempli d'eau par exemple) exige le calcul d'une racine cubique.
– Quant aux valeurs absolues, on les utilise notamment pour exprimer la distance entre deux réels donc lorsqu'on travaille avec des valeurs approchées à ε près ou encore pour les erreurs absolue ou relative.
– …Comme on le voit, les exemples d'applications des notions mathématiques qui suivent sont innombrables…

A propos de cette liste

Cette liste d'exercices est fort détaillée : elle reprend non seulement les énoncés à résoudre lors de la première séance, mais elle donne aussi des indications quant à la démarche à suivre et aux « questions à se poser » lors de la confrontation à la résolution.

I. Problème élémentaire

Combien de m^3 d'eau de mer doit-on prendre pour en retirer 615 kg de sel si 1 litre de cette eau pèse 1,025 kg et contient 3% de son poids en sel ?

1. Quelles sont les données ?
2. Que cherche-t-on ?
3. Si on nomme x l'inconnue, que représente x de façon précise ?
4. Quel lien existe-t-il entre des m^3 et des litres ?
5. Que peut-on calculer successivement ?
6. Quelle est l'équation obtenue ?
7. La résoudre.
8. Donner la solution du problème.

II. Résolution d'équations (x est l'inconnue réelle)

1. a) Définir une équation du premier degré à une inconnue en indiquant de façon précise ce que représente chaque lettre utilisée.
   b) Comment résout-on une équation de ce type ? Exprimer avec précision les opérations utilisées (addition, soustraction, multiplication, division)
   c) Résoudre l'équation $-\pi x + \dfrac{1}{4} = \dfrac{x}{\pi}$ en suivant les démarches que vous avez indiquées ci-dessus sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes équations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions.
   d) Une équation du premier degré à une inconnue peut-elle parfois avoir plus d'une (ou moins d'une) solution ? Si oui, à quelle(s) condition(s) ?
2. Définir une équation du premier degré à deux inconnues.
   Dans un repère cartésien du plan, comment se représente graphiquement une telle équation ? Répondre de façon précise en envisageant tous les cas possibles.
3. Définir une équation du second degré à une inconnue. Comment résout-on une équation de ce type ?
4. a) L'équation $8x^3 + 1 = 0$ est-elle du second degré à une inconnue ?
   b) Si oui, la résoudre en appliquant le processus que vous avez indiqué ci-dessus.
   Si non, de quel type d'équation s'agit-il ?
   c) Comment peut-on décrire le premier membre ?
   d) Quelles sont les formules faisant intervenir ce type de termes ?
   e) Quels sont les processus possibles pour résoudre ce type d'équation ?
   f) Parmi ceux-ci, lequel choisir ?
   g) Résoudre l'équation sans oublier d'indiquer les liens entre les équations et sans oublier de conclure.
5. Soit l'équation $x - \dfrac{1}{x} = 1$.
   a) Quelle différence fondamentale y a-t-il avec les deux équations précédentes ?
   b) Comment appelle-t-on une équation de ce type ?
   c) Que doit-on préciser avant toute chose ?
   d) Quelle(s) opération(s) doit-on effectuer ensuite ?
   e) Quel type d'équation obtient-on alors ?
   f) La résoudre sans oublier de conclure.

III. Valeur absolue et équations (x est l'inconnue réelle)

1. Définir en français et en symboles mathématiques la valeur absolue d'un réel.
2. Que sait-on du signe
   a) d'un binôme du premier degré ?
   b) d'un trinôme du second degré ?
3. a) Si le réel est $x - 1$, définir la valeur absolue de $x - 1$.
   b) Dans ce cas, quelle est la valeur de x qui joue un rôle différent des autres valeurs ?
   c) Répondre aux mêmes questions en considérant le réel $x^2 - 1$.
4. a) Si deux réels ont la même valeur absolue, que peut-on dire de ces réels ? Exprimer la réponse à cette question en français et en symboles mathématiques.
   b) Résoudre $\left|-x + \dfrac{1}{2}\right| = |-x|$

5. a) Si on prend la valeur absolue d'un réel, quel type de réel obtient-on ?
   b) Que peut-on dire de l'équation $||x| - |x^2|| + 2 = 0$? Pourquoi ?
6. a) Si x est un réel et n un naturel non nul, que peut-on dire du signe de x^{2n} ? de x^{2n+1} ?
   b) En tenant compte de ces renseignements, que vaut $|x^{2n}|$? $|x^{2n+1}|$?
7. Résoudre l'équation $||x| - |x^2|| - 2 = 0$

IV. Résolution d'inéquations (x est l'inconnue réelle)

1. Quelle différence fondamentale existe-t-il entre la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue et celle d'une inéquation du même type ?
2. Comment résout-on une inéquation à une inconnue d'un degré autre que le premier ? Décrire de façon précise les différentes étapes de la résolution.
3. Quelle différence fondamentale existe-t-il entre la résolution d'une équation fractionnaire et celle d'une inéquation fractionnaire ?
4. Si on a $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ $(a, b \in \mathbb{R}_0)$ peut-on toujours dire que cette inégalité est équivalente à $a > b$?
   a) Si oui, le prouver.
   b) Si non, donner un contre-exemple et dire dans quel(s) cas cette équivalence pourrait être correcte.
5. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{1-x} > \frac{1}{-x+2}$ en n'oubliant pas de conclure.
6. Si la valeur absolue d'un réel est
   a) supérieure à un réel strictement positif donné, que peut-on dire de l'un par rapport à l'autre ?
   b) même question en remplaçant "supérieure" par "inférieure".
7. Résoudre l'inéquation $|2x - 1| > 2$.
8. a) Quand l'expression $\frac{1}{|-x^2+3+2x|}$ est-elle définie ? Quel est alors son signe ?
   b) Si l'inéquation $\frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{|-x^2+3+2x|}$ possède au moins une solution, à quel ensemble (différent de $\mathbb{R}$) appartient-elle assurément ?
   c) Résoudre cette inéquation.

V. Racines de réels et puissances

1. a) Pour quels réels une racine d'indice pair est-elle définie ? Quel est le signe de sa valeur ?
   b) Mêmes questions dans le cas d'une racine d'indice impair.
   c) Que valent (i) $\sqrt{(-3)^4}$ (ii) $\sqrt[3]{(-\pi)^3}$?
2. a) Pour quelles valeurs de x la racine $\sqrt{9x^2}$ est-elle définie ?
   b) Peut-on dire que $\sqrt{9x^2} = 3x$? Justifier votre réponse.
   c) Si x est un réel négatif, que vaut $\sqrt{9x^2}$?
3. a) Ecrire sous la forme la plus simple possible $(-|(-x^4)|)^3$ si x est un réel négatif.
   b) L'expression $(-|(-x)^4|)^3$ est-elle différente de celle ci-dessus ?
   Si oui, que vaut-elle ? Si non, pourquoi ?
   c) Si n est un naturel non nul, comparer les réels $(-x)^{2n}$ et $-x^{2n}$: sont-ils égaux ou différents ? Justifier votre réponse.
   d) Même question avec $(-x)^{2n+1}$ et $-x^{2n+1}$.

VI. Sommes et symboles sommatoires

1. a) On considère la somme $s_1 = 1+3+5+7+9$. Exprimer en français la somme considérée.
   b) Comment note-t-on de façon générale un terme de ce type ?
   c) Ecrire cette somme à l'aide d'un symbole sommatoire.
2. a) On considère la somme $s_2 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Comment caractériser chacun des termes de cette somme sans tenir compte de son signe ?
   b) Comment, dans une somme, peut-on passer alternativement d'un terme positif à un terme négatif ?
   c) Ecrire s_2 à l'aide d'un symbole sommatoire.
3. On considère la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{j=2}^{5} (-2)^{2j-1}$.
   a) Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?
   b) Que vaut le terme correspondant à $j = 3$?
   c) Que vaut cette somme ?
   d) Si j variait de 2 à 20, quelle formule pratique pourrait-on utiliser pour calculer la somme ? L'appliquer sans calculer le résultat numérique final.
4. On considère la somme $S_2 = \displaystyle\sum_{l=0}^{4} (\pi)^2$.
   a) Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?
   b) Que vaut le terme correspondant à $l = 3$?
   c) Que vaut cette somme ?

VII. Equations cartésiennes de droites

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Quelle est la forme canonique de l'équation cartésienne d'une droite dans le plan ? Indiquer ce que représente chacune des lettres utilisées.
2. a) Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et de coefficient angulaire m (x_1, y_1, m sont des réels) ?
   b) Si cette droite a pour vecteur directeur le vecteur de composantes (a, b), quel lien existe-t-il entre m et (a, b) ? a et b peuvent-ils être des réels quelconques ? Expliquer.
   c) Sans en déterminer l'équation cartésienne, représenter graphiquement la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes $(-1, 2)$ et de coefficient angulaire $-\frac{1}{3}$.
3. a) Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par les points distincts de coordonnées cartésiennes respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ? Envisager tous les cas possibles.
   b) Si cette droite a pour vecteur directeur le vecteur de composantes (a, b), quel lien existe-t-il entre (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (a, b) ?
4. Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et parallèle à
   (a) l'axe des abscisses ?
   (b) l'axe des ordonnées ?
5. a) Si deux droites non parallèles aux axes sont
   (i) orthogonales entre elles, que peut-on dire de leurs coefficients angulaires ?
   (ii) parallèles entre elles, que peut-on dire de leurs coefficients angulaires ?

b) Donner l'équation cartésienne de la droite passant par le point de coordonnée $(0, 1)$ et orthogonale à la droite d'équation $x + y + 1 = 0$. Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.

6. a) Donner l'équation cartésienne de la droite passant par les points de coordonnées $(-2, 1)$ et $(2, 3)$ ainsi que celle de la droite passant par $(-2, 1)$ et $(-2, 0)$.
   b) Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.
7. a) Si on a un vecteur directeur d'une droite de composantes (a, b) et un point de coordonnées (x_1, y_1) par lequel elle passe, en donner des équations paramétriques cartésiennes.
   On considère la droite d'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$.
   b) Donner les composantes d'un vecteur directeur de cette droite.
   c) Donner les coordonnées d'un point de cette droite.
   d) Donner des équations paramétriques cartésiennes de la droite d'équation $x + y + 1 = 0$.
   e) Pour quelle valeur du paramètre, la droite passe-t-elle par le point de coordonnées $(-\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$?

VIII. Résolution de systèmes linéaires

1. a) Quels sont les processus les plus fréquemment utilisés pour résoudre les systèmes linéaires ?
   b) Si on considère l'équation $2y + x = 1$, la représenter graphiquement dans un repère cartésien du plan. Quel est le nom de cette courbe ?
   c) Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} y - x = 0 \\ 2y + x = 1 \end{array} \right.$
   Ne pas oublier de mentionner l'ensemble des solutions.
   d) Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?
2. a) Dans le plan, représenter graphiquement le système $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 3 = 1 \end{array} \right.$
   b) Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?
   c) Résoudre ce système et donner son ensemble de solutions.
   d) Faire de même avec le système $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 3 = 0 \end{array} \right.$
3. a) Si on considère l'équation $y + x + z = 1$, comment peut-on la représenter graphiquement dans un repère cartésien de l'espace ? Quel est le nom de cet élément ?
   b) Si on a un système formé de deux équations de ce type, quelles situations peut-on avoir graphiquement ? En déduire le type d'ensemble de solutions dans chacun des cas.
   c) Résoudre $\left\{ \begin{array}{l} y + x + z = 1 \\ y - x + 2z = 0 \end{array} \right.$

Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Problèmes élémentaires

Pour la répétition de mathématique de la semaine 3 : rédiger au net une résolution des problèmes ci-dessous

1. Au mois d'août 2009, à l'occasion des championnats du monde d'athlétisme à Berlin, le jamaïcain Usain Bolt établissait un nouveau record du monde du 100m en parcourant la distance en 9.58 secondes. A quelle vitesse moyenne exprimée en kilomètres par heure cela correspond-il ?
2. Le lait contient environ les $3/20$ de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2000l de lait si la densité du lait est $1,032$?

Problèmes élémentaires

Pour la répétition de mathématique de la semaine 4 : rédiger au net une résolution des problèmes ci-dessous

1. A submarine dives at an angle of 30° with the horizontal and follows a straigtht-line path for a total distance of 50 m. How far is the submarine below the surface of the water ?
2. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?