1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 4
Répétition 4

Version 7 octobre 2009 (V1 03/10/09)

Préambule

Cette liste concerne essentiellement les nombres complexes ; une introduction et les notions fondamentales ont été présentées au cours, de même que des exercices de base. Il est important de pouvoir manipuler les liens qui existent entre la trigonométrie et les opérations définies au sein de l'ensemble des complexes.

Cette liste présente également encore des descriptions d'ensembles, dont la manipulation est régulière tout au long de l'année (et aussi dans les années suivantes !).

I. Exercices de base sur les nombres complexes

1. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y = axe imaginaire »)
$$i-1, \quad (i-1)(1-2i), \quad \frac{1}{i-1}, \quad \frac{i^3}{i-1}, \quad (1+i)^2$$
2. Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y = axe imaginaire »)
$$i, \quad i-1, \quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right).$$
3. On suppose que α est un nombre réel. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y = axe imaginaire ») en supposant que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$
$$\cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}, \quad (\cos 1 + i\sin 1)(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad \sin(2\alpha) + i\cos(2\alpha).$$
4. Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y = axe imaginaire »)
$$z^2+4=0, \quad 8z^3+1=0, \quad z^2+iz+2=0$$

II. Divers

1. Reprendre l'exercice II.4 de la liste 2 et l'interpréter en utilisant les nombres complexes.
2. Représenter graphiquement l'ensemble des complexes z qui vérifient $|z-1| \leq 1$.
3. On donne l'ensemble A suivant du plan. Décrire cet ensemble à l'aide des coordonnées polaires.
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 4, \ x \leq 0, y \geq 0\right\} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 2, \ \Re z \leq 0, \Im z \geq 0\}.$$