
Université
de Liège



1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES

LISTE TYPE NUMÉRO 6

RÉPÉTITION 6

Préambule

Cette liste concerne

- les décompositions en fractions simples (utilisées notamment pour la primitivation et le calcul intégral)
- et toujours ... les fonctions élémentaires et la manipulation de leurs valeurs et propriétés standards
- les limites des valeurs des fonctions

I. Décomposition en fractions simples (suite)

1. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples à coefficients réels.

$$\frac{x^2}{2x+1}, \quad \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad \frac{x^3}{x^3-1}$$

II. Exercices sur les limites des valeurs des fonctions

1. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Exprimer mathématiquement explicitement la définition qui « se cache » derrière cette succession de symboles (qui « résument » en fait la définition) et en donner une interprétation graphique.

2. Simplifier les expressions suivantes au maximum

$$\ln\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) + \ln\left(\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)^2\right), \quad \operatorname{tg}(\ln(e^\pi/3)), \quad \exp(2\ln(2e)),$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right), \quad \operatorname{arctg}(\sqrt{3}), \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\pi)), \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1)), \quad \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right).$$

3. Se rappeler les limites relatives aux fonctions élémentaires et en déduire rapidement par exemple les quelques limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x^2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

4. Calculer (si possible) les limites suivantes, *sans appliquer le théorème de l'Hospital*

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|1-x|}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 2x}{2x^2 + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(|x + \pi|)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{x^2+1})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln x)$$