Université de Liège

# *1, 2, 3...Sciences*

## *Année académique 2009-2010*

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
LISTE TYPE NUMÉRO 7 ET 8
RÉPÉTITIONS 7 ET 8 (SEMAINES 8 ET 9)

Version 30 octobre 2009 (V1 26/10/09)

**Préambule**

Cette liste concerne
– la dérivation des fonctions, et des applications
– les primitives de fonctions

Ces notions et leurs propriétés sont utilisées dans de multiples contextes pour la modélisation de phénomènes et le traitement de ces modèles.

En voici un exemple élémentaire. La loi de chute libre des corps (mise en évidence déjà par Galileo Galilei, 1564-1642, à la fin du XVIeme siècle) affirme que lorsqu'on lâche un corps près de la surface de la Terre, la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps durant lequel on le laisse tomber. Si on néglige la résistance de l'air, la distance $y$ est donnée par $y = 16\ t^2$ lorsqu'elle est mesurée en pieds, et par $y = 4,9\ t^2$ lorsqu'elle est mesurée en mètres[1]. Ainsi, la vitesse moyenne pendant les deux premières secondes est

$$\frac{16.2^2 - 16.0^2}{2} = 32 \text{ pieds par seconde}$$

et la vitesse moyenne entre la première et la deuxième seconde est

$$\frac{16.2^2 - 16.1^2}{1} = 48 \text{ pieds par seconde}$$

Si on s'intéresse plutôt à la vitese « instantanée » au temps $t_0$, on est amené à calculer les quotients

$$\frac{16.(t_0 + h)^2 - 16.t_0^2}{h}$$

pour des valeurs de $h$ de plus en plus petites. Cela conduit bien sûr à la notion de *dérivée* de la fonction $t \mapsto y(t)$ en $t_0 \ldots$

**I. Continuité et dérivation**

1. a) On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

$$\sqrt[3]{3x^4+1} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \qquad \frac{1}{x^2+2x+1} \qquad \mathrm{arctg}(\sin x) \qquad \sqrt{\cos 2x} \qquad \sin(\mathrm{tg} x)$$

$$e^{\arcsin x} \qquad e^{e^x} \qquad \ln(x^2) \qquad \ln(x^2-x-2) \qquad (\ln(3))^x \qquad x|x|$$

   b) Représenter la fonction $x \mapsto x|x|$ dans un repère orthonormé.

**II. Divers**

1. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \cos x$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Représenter cette fonction et cette tangente.
2. Représenter graphiquement les fonctions $f_1$ et $f_2$ suivantes

$$f_1(x) = \frac{x - x^2 + 1}{1 - x}, \quad f_2(x) = xe^{-x}.$$

[1] attention donc aux lois trouvées dans diverses références ! Prendre garde aux unités de mesure, au SI, etc

3. Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)

| | | |
|---|---|---|
| $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{x+1}$ | $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{\text{arctg}(3x^2+2)}$ | $\lim_{x\to -\infty} \exp\left(-\frac{1}{x+1}\right)$ |
| $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln\sqrt[3]{x}$ | $\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1/\lvert x\rvert)}{\sqrt{x^2}}$ | $\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$ |
| $\lim_{x\to -\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ | $\lim_{x\to -\infty} \left(\ln(\lvert x-1\rvert)-\ln x^2\right)$ | $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(1-x)}{\lvert x-1\rvert}$ |
| $\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(-x^2+3x+4)}{x-4}$ | $\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\lvert -x^2+3x+4\rvert}{x-4}$ | $\lim_{x\to \pi/2} \frac{1-\sin x}{\cos x}$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}x-\sin x}{x^3}$ | $\lim_{u\to +\infty} u\, e^{\frac{1}{u-1}}$ | $\lim_{t\to 1^-} (t-1)\ln(1-t^2)$ |
| $\lim_{y\to +\infty} \log_y 2$ | $\lim_{x\to -\infty} \frac{\exp(2x)}{\exp(x)}$ | $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{\exp(x)}$ |

4. Deux bateaux-jouets partent d'un même endroit sur un lac et s'éloignent l'un de l'autre en suivant des lignes droites qui forment un angle de mesure égale à soixante degrés. Si la vitesse de chaque bateau est égale à deux mètres par minute, à quelle vitesse s'accroît la distance entre les deux bateaux ?

5. Une lentille convexe est caractérisée par une distance focale $f$. Si un objet se trouve à une distance $p$ de la lentille, son image sera à une distance $q$ liée à $p$ par la relation $\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Si la distance focale vaut 3 cm et que $p$ croît, quelle est la vitesse de variation de $q$ lorsque $p$ vaut 33cm ?

### III. Primitives

1. Primitiver les fonctions données explicitement ci-dessous. Dans chaque cas, spécifier l'intervalle dans lequel vous travaillez.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{2-3x}$ | $x^2+x\sin(3x)$ | $x\sin(x^2)$ | $\sin^2(3x)$ |
| $x\ln(x+1)$ | $\arcsin x$ | $\sqrt{x}\ln x$ | $(2x-1)e^{-x}$ |
| $x\sin^2(4x)$ | $x^2\sqrt{1+2x^3}$ | $\cos(\pi x)\ e^{2x}$ | $\pi^x$ |
| $x^\pi$ | $\frac{1}{x^3+x}$ | $\frac{1+2x}{x+1}$ | $\frac{1}{1+2x+x^2}$ |

2. Que vaut la primitive de $x\mapsto x^2+1$ qui prend la valeur 2 en $-1$ ?

# *1, 2, 3...Sciences*

# *Année académique 2009-2010*

---

## *Problèmes élémentaires*

**Pour la répétition de mathématique de la semaine 10 : ... pas de résolution de problème à rédiger ...**

mais un petit ***devoir :***

On donne la fonction $f$ explicitement par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que $f$ est continément dérivable sur $\mathbb{R}$ et esquisser sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

## *Se poser des questions...*

Comment pouvez-vous expliquer l'affirmation suivante : *la loi de chute libre des corps (mise en évidence déjà par Galileo Galilei, 1564-1642, à la fin du XVIeme siècle) affirme que lorsqu'on lâche un corps près de la surface de la Terre, la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps durant lequel on le laisse tomber. Si on néglige la résistance de l'air, la distance y est donnée par* $y = 16\ t^2$ *lorsqu'elle est mesurée en pieds, et par* $y = 4,9\ t^2$ *lorsqu'elle est mesurée en mètres.*

## *Problèmes élémentaires précédents (listes 1, 2, 3, 4, 5, 6)*

1. Au mois d'août 2009, à l'occasion des championnats du monde d'athlétisme à Berlin, le jamaïcain Usain Bolt établissait un nouveau record du monde du 100m en parcourant la distance en 9.58 secondes. A quelle vitesse moyenne exprimée en kilomètres par heure cela correspond-il ?
2. Le lait contient environ les 3/20 de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2000 l de lait si la densité du lait est $1,032$ ?
3. A submarine dives at an angle of $30^\circ$ with the horizontal and follows a straigtht-line path for a total distance of 50 m. How far is the submarine below the surface of the water ?
4. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?
5. Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{2\ 500}$ la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?

6. A la météo, on annonce une nuit de pluie et le lendemain, on mesure effectivement sur la terrasse une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?
7. Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?
8. En imprimerie, une des classifications standards des formats de papier s'appelle le *système ISO A*. Les feuilles A4 bien connues font partie de ce système, de même que les A3, A5, etc On passe du type A4 au type A5 en divisant le plus grand des côtés du rectangle en 2 ; on procède ainsi successivement pour passer d'un type à l'autre.

   Vous préparez un envoi postal standard dont le poids ne doit pas excéder 100g. Le papier employé est de la catégorie commerciale " $80g/m^2$" ce qui signifie qu'un mètre carré de papier pèse 80g. Sachant qu'une feuille A0 a une aire de $1\mathrm{m}^2$ et que l'enveloppe utilisée pèse 20g, combien de pages A4 pouvez-vous glisser dans l'enveloppe ?
9. Le nombre d'or est le réel défini comme suit. Il s'agit du rapport entre deux longueurs (la plus grande au numérateur) telles que le rapport de la somme de celles-ci sur la plus grande soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite. Que vaut ce nombre d'or ?

   *Se poser des questions : ... le nombre d'or est célèbre depuis fort longtemps ; il n'est pas appelé ainsi sans raison. Il apparaît dans la nature ... Où par exemple ? Et comment le construire géométriquement ? ...*
10. Un mélange contient 45 litres d'eau salée et 30 litres d'eau pure. On désire en faire un mélange qui, sur deux litres, contienne 1/2 litre d'eau salée. Combien de litres d'eau pure doit-on ajouter ?
11. Une rivière coule au pied d'une falaise du haut de laquelle on laisse tomber une pierre. On entend l'impact 6 secondes après l'avoir lâchée. La distance $d$ en m parcourue par la pierre jusqu'à la rivière en $t$ secondes est donnée par $d = \frac{1}{2}gt^2$ où $g = 10$ m/s$^2$ et la vitesse du son est de 330 m/s. En mètres, que vaut approximativement la hauteur de la falaise ?
12. Si $a$ et $b$ sont deux nombres réels, comment s'exprime la tangente de leur différence en fonction de la tangente de chacun d'eux ? Utiliser votre réponse pour déterminer la valeur exacte de la tangente de $\frac{\pi}{12}$.
13. Un touriste observe un monument depuis le sol. Il évalue une première fois l'angle d'élévation du monument et trouve $60^\circ$. Il recule de 100 m et son évaluation donne alors $45^\circ$. Quelle est approximativement la hauteur du monument ? (Note : le touriste est supposé très petit par rapport au monument ; dans le calcul, on peut donc négliger sa taille.)
14. Sur un plan à l'échelle 1/200, les dimensions d'un jardin rectangulaire sont 4,5 cm et 3 cm. Quelle aire en ares manque-t-il dans la réalité pour avoir un jardin dont la superficie vaut 1 are ?