1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

EXERCICES DE MATHÉMATIQUE
LISTE TYPE NUMÉRO 10
RÉPÉTITIONS (11), 12 ET 13 (SEMAINES 12 ET 13)

Version 24 novembre 2009 (V1 20/11/09)

Préambule

Cette liste concerne
– les équations différentielles

Les équations différentielles sont utilisées dans de multiples contextes pour la modélisation de phénomènes et le traitement de ces modèles. En voici un exemple.

Soient x et y les tailles de deux organes d'un même animal (considérées comme fonction du temps). Les données empiriques montrent que les taux de croissance spécifiques, à savoir

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}D_t x(t) \quad \text{et} \quad \frac{1}{y}\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}D_t y(t)$$

peuvent être considérés comme approximativement proportionnels. Cela signifie qu'il existe une constante non nulle k telle que

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dt} = k\frac{1}{x}\ \frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

En considérant que y est fonction de x, en utilisant la dérivation des fonctions de fonctions et en supposant que $\frac{dx}{dt}$ n'est pas nul, on a

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\ \frac{dx}{dt}$$

donc (1) devient

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x} \qquad (2)$$

Cette équation est « à second membre séparé » et aussi « linéaire » ; elle peut être résolue par des méthodes directes (qui sont notamment présentées dans les notes de cours). Sa solution générale s'écrit

$$y = Cx^k$$

pour une certaine constante C (on parle de relation « allométrique »).

Il existe de nombreux types d'équations différentielles. Les méthodes de résolution ne sont pas toujours évidentes ni aisées à manipuler, sauf dans le cas des équations différentielles *linéaires à coeffcients constants.* Il est donc très important d'être capable de les reconnaître.

Tout ceci est abondamment illustré notamment dans les notes, où une attention toute particulière est accordée également à l'évolution des populations (en présence ou non de facteurs limitants).

I. Quelques manipulations

1. L'équation différentielle $(D_t y)^2 = 6y$ est-elle linéaire ?
2. Montrer que la fonction $g(t) = t^2 - 2t,\ (t \in \mathbb{R})$ vérifie le système $\begin{cases} (D_t y)^2 = 4(y+1) \\ y(0) = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$
3. Montrer que[1] la fonction $g(t) = \operatorname{tg}\, t + \dfrac{1}{\cos t},\ t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, vérifie l'équation $2\dfrac{dy}{dt} - y^2 = 1$.

[1]Les dérivées première et seconde de $f(x),\ x \in I$ s'écrivent parfois $\frac{df}{dx},\ \frac{d^2 f}{dx^2}$

II. Equations différentielles, résolutions

1. Résoudre les équations différentielles et les systèmes suivants, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$a)\ Df(x) + 2if(x) = 0$	$b) D^2 f = f$
$c) D^2 f = 0$	$d)\ Df(x) - f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$
$g)\ Df(x) + 2f(x) = \frac{1}{1+e^{x}}$	$h)\ D^2 f(x) + Df(x) - 2f(x) = xe^x + e^{2x}$
$i)\ 4D^2 f(x) + f(x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$	$j)\ 4D^2 f(x) + 4Df(x) + f(x) = 1$

2. Dans certaines conditions, la température de surface $y(t)$ d'un objet change au cours du temps selon un « taux » proportionnel à la différence entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant, que l'on suppose constante et que l'on note y_0. On obtient ainsi l'équation différentielle

$$Dy(t) = k(y - y_0)$$

où k est une constante strictement négative. Cette équation est appelée « Newton's law of cooling » et elle est utilisée notamment pour déterminer le temps entre la mort d'un individu et la découverte de son corps.

Résoudre cette équation et montrer alors que la température de l'objet se rapproche de la température ambiante au fur et à mesure que le temps passe.

III. Equations différentielles linéaires à coefficients constants, du second ordre, avec conditions initiales

1. Résoudre le système suivant, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$$\begin{cases} 4D^2 f(x) - f(x) = x + 1 \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.

$$4D^2 f(x) - Df(x) = x$$

Déterminer ensuite la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1.

III. Divers

1. Déterminer la valeur de la constante c de telle sorte que la fonction $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle

$$c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

2. Soit L la longueur d'un pendule et soit T sa période d'oscillation. Si les oscillations sont petites et si le pendule n'est soumis à aucune force autre que la gravité, alors un modèle liant T et L est l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dL} = \frac{T}{2L}.$$

Montrer que cela implique que la période T est proportionnelle à la racine carrée de la longueur L.

Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Problèmes élémentaires

Pour la répétition de mathématique de la semaine 12 : ... pas de résolution de problème à rédiger, ni de devoir ...

Petits devoirs précédents (listes 7-8 et 9)...

1. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   Montrer que f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et esquisser sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

2. Soit r le rayon d'une artère cylindrique de longueur l et soit x la distance d'une cellule de sang (supposée ponctuelle) au centre de la section circulaire qui la contient. Le volume V par unité de temps du flux du sang à travers l'artère est

$$V = \int_0^r \frac{k}{l} x(r^2 - x^2) dx$$

   où k est une constante dépendant de la différence de pression aux deux extrémités de l'artère et de la viscosité du sang. Calculer V.

Se poser des questions...

Comment pouvez-vous expliquer l'affirmation suivante : *la loi de chute libre des corps (mise en évidence déjà par Galileo Galilei, 1564-1642, à la fin du XVIeme siècle) affirme que lorsqu'on lâche un corps près de la surface de la Terre, la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps durant lequel on le laisse tomber. Si on néglige la résistance de l'air, la distance y est donnée par* $y = 16\ t^2$ *lorsqu'elle est mesurée en pieds, et par* $y = 4,9\ t^2$ *lorsqu'elle est mesurée en mètres.*

Problèmes élémentaires précédents (listes 1, 2, 3, 4, 5, 6)

1. Au mois d'août 2009, à l'occasion des championnats du monde d'athlétisme à Berlin, le jamaïcain Usain Bolt établissait un nouveau record du monde du 100m en parcourant la distance en 9.58 secondes. A quelle vitesse moyenne exprimée en kilomètres par heure cela correspond-il ?
2. Le lait contient environ les 3/20 de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2000 l de lait si la densité du lait est $1,032$?
3. A submarine dives at an angle of 30° with the horizontal and follows a straigtht-line path for a total distance of 50 m. How far is the submarine below the surface of the water ?

4. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?

5. Sur une carte à l'échelle $\dfrac{1}{2\ 500}$ la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?

6. A la météo, on annonce une nuit de pluie et le lendemain, on mesure effectivement sur la terrasse une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?

7. Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?

8. En imprimerie, une des classifications standards des formats de papier s'appelle le *système ISO A*. Les feuilles A4 bien connues font partie de ce système, de même que les A3, A5, etc On passe du type A4 au type A5 en divisant le plus grand des côtés du rectangle en 2 ; on procède ainsi successivement pour passer d'un type à l'autre.

   Vous préparez un envoi postal standard dont le poids ne doit pas excéder 100g. Le papier employé est de la catégorie commerciale " $80g/m^2$" ce qui signifie qu'un mètre carré de papier pèse 80g. Sachant qu'une feuille A0 a une aire de 1m^2 et que l'enveloppe utilisée pèse 20g, combien de pages A4 pouvez-vous glisser dans l'enveloppe ?

9. Le nombre d'or est le réel défini comme suit. Il s'agit du rapport entre deux longueurs (la plus grande au numérateur) telles que le rapport de la somme de celles-ci sur la plus grande soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite. Que vaut ce nombre d'or ?

   Se poser des questions : … le nombre d'or est célèbre depuis fort longtemps ; il n'est pas appelé ainsi sans raison. Il apparaît dans la nature … Où par exemple ? Et comment le construire géométriquement ? …

10. Un mélange contient 45 litres d'eau salée et 30 litres d'eau pure. On désire en faire un mélange qui, sur deux litres, contienne 1/2 litre d'eau salée. Combien de litres d'eau pure doit-on ajouter ?

11. Une rivière coule au pied d'une falaise du haut de laquelle on laisse tomber une pierre. On entend l'impact 6 secondes après l'avoir lâchée. La distance d en m parcourue par la pierre jusqu'à la rivière en t secondes est donnée par $d = \frac{1}{2}gt^2$ où $g = 10$ m/s^2 et la vitesse du son est de 330 m/s. En mètres, que vaut approximativement la hauteur de la falaise ?

12. Si a et b sont deux nombres réels, comment s'exprime la tangente de leur différence en fonction de la tangente de chacun d'eux ? Utiliser votre réponse pour déterminer la valeur exacte de la tangente de $\frac{\pi}{12}$.

13. Un touriste observe un monument depuis le sol. Il évalue une première fois l'angle d'élévation du monument et trouve 60°. Il recule de 100 m et son évaluation donne alors 45°. Quelle est approximativement la hauteur du monument ? (Note : le touriste est supposé très petit par rapport au monument ; dans le calcul, on peut donc négliger sa taille.)

14. Sur un plan à l'échelle 1/200, les dimensions d'un jardin rectangulaire sont 4,5 cm et 3 cm. Quelle aire en ares manque-t-il dans la réalité pour avoir un jardin dont la superficie vaut 1 are ?