1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 9
Répétitions 9 et 10 (semaines 10 et 11)

Version 10 novembre 2009 (V1 08/11/09)

Préambule

Cette liste concerne
– l'intégration de fonctions d'une variable réelle

Cette notion et ses propriétés sont utilisées dans de multiples contextes pour la modélisation de phénomènes et le traitement de ces modèles.

En voici un exemple élémentaire. On suppose que $T = f(t)$ est la température relevée au temps t dans une station météo. La station effectue des mesures toutes les heures, durant 24h. Pour avoir une idée de la température pour un jour donné, on peut bien sûr prendre par exemple six températures dans des intervalles de temps de 4h, à savoir $T_1 = f(4)$, $T_2 = f(8)$, $T_3 = f(12)$, $T_4 = f(16)$, $T_5 = f(20)$, $T_6 = f(24)$ et en chercher la moyenne

$$T_{moyen} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6}{6}.$$

Cette façon de procéder peut ne pas refléter de manière satisfaisante ce qui s'est vraiment passé car il est bien sûr possible que de brèves perturbations se produisent dans un laps de temps qui n'est pas pris en compte par nos calculs (par exemple orage soudain entre T_2 et T_3).

La fonction « température » étant continue, il semble raisonnable de *définir la valeur moyenne* de cette température en prenant une « limite de moyennes quand le nombre d'échantillons devient grand ». Une définition correcte de ce processus consiste ainsi à définir

$$T_{moyen} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)$$

où $t_j = j\ \frac{24}{n}$. En posant $t_0 = 0$, on a donc

$$T_{moyen} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(t_j) = \frac{1}{24} \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} (t_i - t_{j-1})\ f(t_j) = \frac{1}{24} \int_0^{24} f(t)\ dt.$$

I. Calculs d'intégrales

1. Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 2x)\ dx \qquad \int_{-1}^{1} xe^{-x}\ dx \qquad \int_0^1 xe^{-x^2}\ dx \qquad \int_{1/2}^{3} \sqrt{3 - \frac{x}{2}}\ dx$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 x\ dx \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan^2 x\ dx \qquad \int_0^{\pi} x\cos^2 x\ dx \qquad \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\ dx$$

$$\int_0^1 \ln(x^2)\ dx \qquad \int_{-1}^{e} x\ln(|x|)\ dx \qquad \int_{-2}^{4} \frac{x+3}{x+4}\ dx \qquad \int_0^1 \mathrm{arctg} x\ dx$$

2. Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{9x^2+4}\ dx \qquad \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{9x^2-4}\ dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+1}\ dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\ dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x-3}\ dx \qquad \int_{\pi/3}^{+\infty} \sin(2x)\ e^{-x}\ dx$$

II. Calcul d'aires

1. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante

$$\left\{(x,y) : x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right], y \in \mathbb{R} \text{ et } \sin x \leq y \leq \cos(2x)\right\}.$$

Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

III. Divers

1. Soit un réel x pour lequel $\mathrm{tg}(x/2)$ existe. Déterminer l'expression de $\sin x$ et de $\cos x$ en fonction de $\mathrm{tg}(x/2)$.
2. En cartographie, sur une carte de Mercator, l'ordonnée d'un point proche de l'équateur et dont la latitude est φ, est donnée par
$$y(\varphi) = R \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos u} du.$$
Montrer que
$$y = R \ \ln\left(\left|\mathrm{tg}(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})\right|\right).$$