Université de Liège

1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2009-2010

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste type numéro 3 bis : solutions

Version 8 mars 2010 (V1 : 07/03/2010)

Exercices

1. **Etudier la convergence de la suite q^m $(m \in \mathbb{N}_0)$ en fonction de la valeur du paramètre réel q.**

   Si $q = 1$, la suite converge vers 1.
   Si $q = -1$, la suite diverge.
   Si $|q| > 1$, la suite converge vers l'infini.
   Si $|q| < 1$, la suite converge vers zéro.

2. **La suite suivante converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?**

$$x_m = \sum_{\zeta=2}^{m} \frac{1}{\zeta^2 - 1}, \quad m \in \mathbb{N}, m \geq 2.$$

   La suite converge vers $\dfrac{3}{4}$.

3. **Etudier la convergence des séries suivantes (signaler le critère des séries alternées)**

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(2m)}{m^2}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{3m+1}}{m} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m}}{\sqrt{2m+1}}, \quad \sum_{m=4}^{+\infty} (\sin\sqrt{2})^m.$$

   Toutes les séries, sauf la troisième, convergent.

4. **Etudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes, lorsqu'elles sont convergentes.**

$$\sum_{m=2}^{+\infty} (-3)\left(\frac{2}{3}\right)^m, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{-m} \frac{3^m}{2^{m+2}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

   La première série converge vers -4, la deuxième diverge et la troisième converge vers $e - 1$.

5. **Illustrer par un exemple le fait que** *si la série $\sum_{m=1}^{+\infty} x_m$ converge et si la série $\sum_{m=1}^{+\infty} |x_m|$ ne converge pas, alors on ne peut pas impunément grouper les termes de la première sans changer la limite.*
   Exemple avec la série harmonique alternée : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots \to \ln 2$ **et**

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots \\ = \; & \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) \\ \to \; & \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

6. **Perdu dans le désert, en panne de gps et de toute batterie (calculette etc), un explorateur est amené à établir son itinéraire en se servant de carte, des « vieux » moyens et de ses connaissances de base de « calculus ». Il est amené à estimer la valeur du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés. Il souhaite avoir cette estimation avec une erreur strictement inférieure à un millième.**
   Comment peut-il procéder ?

   Une mesure d'angle égale à 20 degrés correspond au réel $\dfrac{\pi}{9} < \dfrac{1}{2}$.
   L'approximation polynomiale en 0 du cosinus donne

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots \quad \text{avec} \quad |R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si $x = \dfrac{1}{2}$,

$$\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifié si} \quad n = 4.$$

Dès lors, une valeur approchée du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés est donnée par

$$P\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1 - \frac{(\frac{\pi}{9})^2}{2!} + \frac{(\frac{\pi}{9})^4}{4!} = 1 - \frac{\pi^2}{162} + \frac{\pi^4}{81^2\ .\ 24} \approx 0,9396951.$$