1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

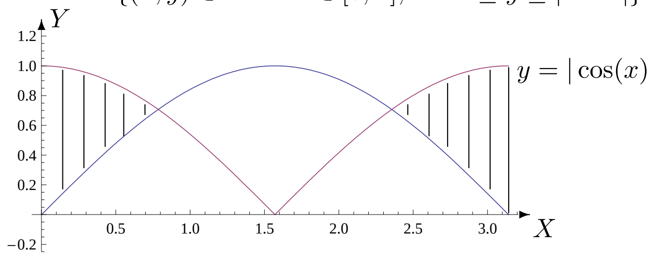
EXERCICES DE MATHÉMATIQUE, SECOND QUADRIMESTRE
LISTE TYPE NUMÉRO 1
RÉPÉTITIONS 1 ET 2 : SOLUTIONS

Version 10 février 2010 (V1 : 23/01/2010)

Exercices de rappel

1. **Déterminer l'aire de la surface du plan dont une représentation analytique est donnée ci-dessous. En la hachurant, représenter cette surface dans le plan muni d'un repère orthonormé.**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0, \pi], \ \sin x \leq y \leq |\cos x|\}$$



L'aire de la surface hachurée vaut $2\sqrt{2} - 2$.

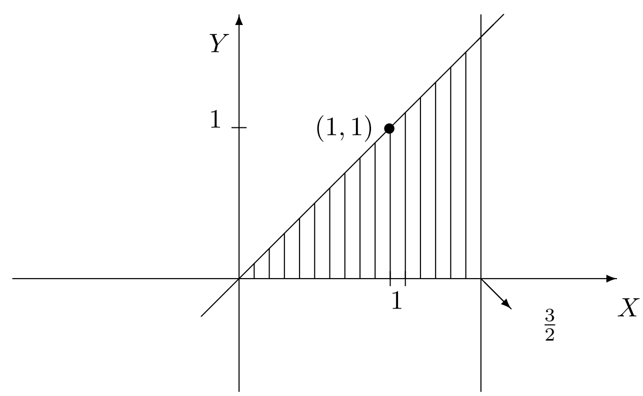
2. **Pour toutes les valeurs du réel strictement positif r, déterminer la valeur de l'intégrale suivante**

$$I(r) = \int_0^r \ln x \ dx.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de r cette intégrale est-elle nulle ? Interpréter graphiquement la réponse.

L'intégrale vaut $r\ln(r) - r$; elle est nulle pour $r = e$. Cela signifie que l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = 0, y = 0$ et la courbe d'équation $y = \ln(x), \ x \in]0, 1]$ d'une part et l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = e, y = 0$ et la courbe d'équation $y = \ln(x), \ x \in [1, e]$ d'autre part sont égales.

3. **Déterminer une représentation analytique de l'ensemble borné et fermé suivant (hachuré)**



Une représentation analytique de cet ensemble est donnée par

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \frac{3}{2}\right], \ y \in [0, x]\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[0, \frac{3}{2}\right], \ x \in \left[y, \frac{3}{2}\right]\right\}.$$

Manipulation des fonctions de plusieurs variables

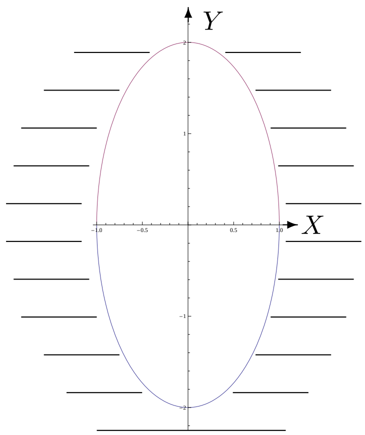
1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**

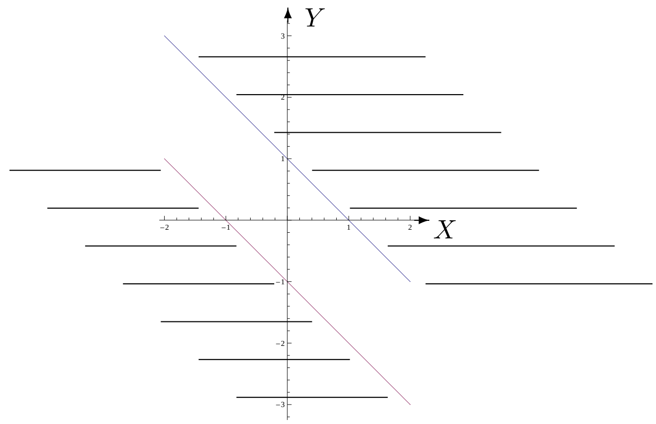
$$f(x, y) = \ln\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right), \quad g(x, y) = \sqrt{|x + y| - 1}.$$

Les domaines de définition sont respectivement

$$\operatorname{dom}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 > 0\right\} \qquad \operatorname{dom}(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| - 1 \geq 0\}$$

et les représentations graphiques sont les suivantes



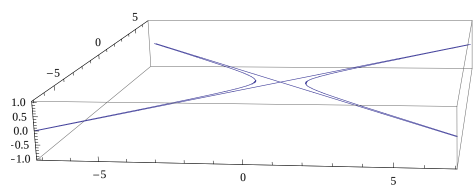


Les points de l'ellipse n'appartiennent pas à l'ensemble.

Les points des droites appartiennent à l'ensemble.

2. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ dans le plan d'équation $z = 0$. Comment appelle-t-on une telle courbe ?**

La trace de la surface donnée dans le plan d'équation $z = 0$ est une hyperbole dont voici la représentation



3. **On donne la fonction f par**

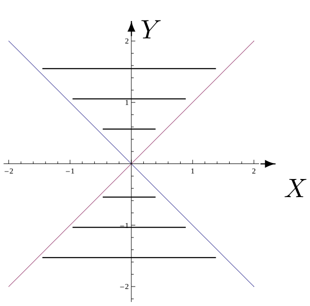
$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right).$$

a) Déterminer le domaine de définition et d'infinie dérivabilité de f. Représenter ces domaines.

Le domaine de définition et celui d'infinie dérivabilité sont respectivement

$$\mathrm{dom}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, -1 \leq \frac{x}{y} \leq 1\right\} \quad A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, -1 < \frac{x}{y} < 1\right\}$$

dont voici la représentation



Les points de l'axe des abscisses n'appartiennent à aucun des deux ensembles ; ceux des bissectrices appartiennent au domaine de définition mais non à celui d'infinie dérivabilité. Les points des parties hachurées du plan appartiennent aux deux ensembles.

b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_xf(x,y)+|y|D_yf(x,y)$.

On a

$$|x|D_xf(x,y)+|y|D_yf(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \text{ et } y \text{ sont de même signe} \\ \frac{-2x}{\sqrt{y^2-x^2}} & \text{si} \quad x \text{ et } y \text{ sont de signes différents.}\end{cases}$$

c) Déterminer l'expression explicite de $F(t)=f\left(t,\frac{1}{t}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

L'expression explicite de $F(t)=f\left(t,\frac{1}{t}\right)$ est donnée par $F(t)=\arcsin(t^2)$. Si on considère la fonction F donnée explicitement par $F(t)=\arcsin(t^2)$, son domaine de dérivabilité est $]-1,1[$ et sa dérivée est donnée explicitement par

$$DF(t)=\frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Si on envisage la fonction F comme fonction composée alors son domaine de dérivabilité est $]-1,1[\setminus\{0\}$.

4. **On donne f, continûment dérivable sur $]-1,1[\times]-1,1[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y)=f(x+y,x-y)$ ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en fonction de celles de f.**

   Le domaine de dérivabilité de F est l'ouvert $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\in\,]-1,1[,\ x-y\in\,]-1,1[\}$ c'est-à-dire, dans un repère orthonormé, les points intérieurs au carré dont les sommets ont pour coordonnées cartésiennes $(0,1),(1,0),(0,-1)$ et $(-1,0)$.
   Ses dérivées partielles sont

   $$D_xF(x,y)=(D_uf)_{(x+y,x-y)}+(D_vf)_{(x+y,x-y)}$$

   et

   $$D_yF(x,y)=(D_uf)_{(x+y,x-y)}-(D_vf)_{(x+y,x-y)}$$

   où u est la première variable de f et v la seconde.
5. **Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x,y,z)=ze^{xy}$.**
   Le gradient de la fonction f est le vecteur de composantes $(yze^{xy},\ xze^{xy},\ e^{xy})$.

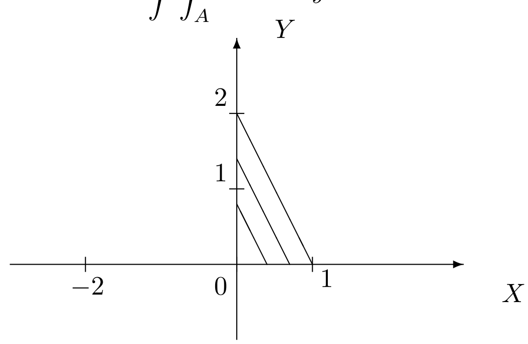
Calcul intégral

1. **a) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=y^2\sin(xy)$ sur $A=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]$.**

   L'intégrale vaut $\dfrac{4}{\pi^2}-\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{1}{2}$.

   b) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=x+y$ sur $A=\{(x,y)\ :\ 0\le y\le \inf\{x,\sqrt{1-x^2}\}\}$.
   L'intégrale vaut $\dfrac{1}{3}$.
2. **Déterminer la valeur de l'intégrale suivante sur l'ensemble borné fermé hachuré ci-dessous et simplifier la réponse au maximum**

$$\int\int_A e^{x+y}\,dxdy$$



L'intégrale vaut $(e-1)^2$.

3. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

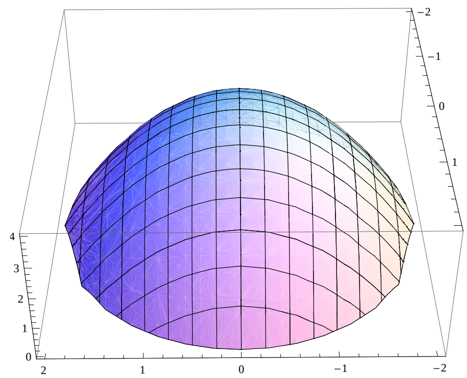
$$x_A = s^{-1} \int\int_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1} \int\int_A y\ dx\ dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène en forme de demi-cercle de rayon R (R réel strictement positif).

Le centre de masse a pour coordonnées $(x_A, y_A) = \left(0, \dfrac{4R}{3\pi}\right)$.

4. **Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2 - y^2$ et par le plan des axes X, Y. Donner aussi une représentation graphique de ce corps.**

Le volume de ce corps vaut 8π et sa repésentation graphique est



5. **Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a)\ \int_{-2}^{2} \left(\int_{-1}^{-x/2} f(x,y) dy \right) dx, \qquad b)\ \int_{0}^{\sqrt{2}} \left(\int_{y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx \right) dy.$$

Après permutation, on a

$$a)\ \int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{-2y} f(x,y) dx \right) dy, \qquad b)\ \int_{0}^{\sqrt{2}} \left(\int_{0}^{x} f(x,y) dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy \right) dx.$$

6. **Calculer l'intégrale de $f(x,y) = x + y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)**

Une description analytique de cet ensemble est

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ ]-\infty, 0],\ y \in [0, e^x]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[,\ y \in [0, e^{-x}]\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in\ ]0,1],\ x \in [\ln(y), -\ln(y)]\}.$$

L'intégrale vaut $\dfrac{1}{2}$.